

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Física Teórica II**

**(Métodos matemáticos de la Física)**



**FORMALISMO FERMIÓNICO DE SOLITONES EN  
MODELOS INTEGRABLES DE LA DINÁMICA DE LOS  
FLUIDOS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR**

**Elena Medina Reus**

Bajo la dirección del doctor

Luis Martínez Alonso

**Madrid, 2002**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**Facultad de Ciencias Físicas**

**Departamento de Física Teórica II**

**FORMALISMO FERMIONICO DE  
SOLITONES EN MODELOS INTEGRABLES  
DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS**

**Elena Medina Reus**

**Madrid, 1992**

**Colección Tesis Doctorales. N.º 313/92**

**© Elena Medina Reus**

**Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía.  
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria.  
Madrid, 1992.**

**Ricoh 3700**

**Depósito Legal: M-37218-1992**



La Tesis Doctoral de D. ELENA BLANCA MEDINA REUS .....

.....  
Titulada "FORMALISMO FERMIONICO DE SOLITONES EN MODELOS  
INTEGRALES DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS"  
.....

Director Dr. D. LUIS MARTINEZ ALONSO .....

fue leida en la Facultad de CC. FISICAS .....

de la UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, el día 30 .....

de .....enero..... de 19 92..., ante el tribunal

constituido por los siguientes Profesores:

PRESIDENTE A. GALINDO TIXAIRE .....

VOCAL .....R. FERNANDEZ ALVAREZ ESTRADA .....

VOCAL .....G. SIERRA .....

VOCAL .....J.M. CERVERO .....

SECRETARIO L. ABELLANAS RAPUN .....

.....  
habiendo recibido la calificación de *APRO. con LOUDE*

*Por. V. M. M. D. R.* .....

Madrid, a 30 de Enero de 1992.

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL.

**Formalismo fermiónico de solitones  
en modelos integrables  
de la dinámica de los fluidos**

Memoria presentada por Elena Medina Reus  
para optar al grado de Doctor en Ciencias  
Físicas. Dirigida por Luis Martínez Alonso.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
Facultad de Ciencias Físicas  
Departamento de Física Teórica II

**Formalismo fermiónico de solitones**  
**en modelos integrables**  
**de la dinámica de los fluidos**

Memoria presentada por Elena Medina Reus  
para optar al grado de Doctor en Ciencias  
Físicas. Dirigida por Luis Martínez Alonso.

# Agradecimientos

Quisiera comenzar expresando mi agradecimiento a Luis Martínez Alonso por la excelente dirección de este trabajo. No sólo ha superado la perfección como director de tesis introduciéndome en el tema de trabajo, ayudándome a superar cada una de las dificultades surgidas, contagiándome su entusiasmo por la ciencia e inculcándome parte de su más que brillante espíritu científico; sino que su constante simpatía y comprensión han hecho muy agradables todas nuestras conversaciones de trabajo. Es también necesario señalar su infinita paciencia al leer cada una de las versiones preliminares de esta tesis introduciendo modificaciones que la han hecho sin duda alguna mucho más legible.

Es también mi deseo hacer constar mi agradecimiento a todos los miembros de los departamentos de Física Teórica I y II tanto por todos los medios que han puesto a mi alcance para la realización de este trabajo como por la cálida acogida que de todos ellos he recibido. De un modo muy especial le agradezco a Rafael Hernández todas las horas que ha dedicado a ayudarme con las figuras de esta tesis. Quiero también dar las gracias a Miguel Angel Rodríguez por permitirme utilizar su ordenador para hacer la mayor parte de dichas figuras, a Manuel Mañas y Angel Sánchez por sus consejos en cuanto al mecanografiado de la tesis y los trámites a seguir, a Jesús Marín por nuestras largas charlas en los momentos difíciles y a M. Ascensión Iglesias por su ayuda en los problemas técnicos y administrativos que me han surgido durante mi estancia en el departamento de Física Teórica II.

Han sido tantas las personas de las facultades de Ciencias Físicas y Matemáticas que me han dado su amistad a lo largo de estos años que su enumeración me resulta imposible; a todos ellos deseo expresar mi sincero agradecimiento.

Finalmente quiero agradecer a mi familia el apoyo que para mí ha supuesto durante la realización de este trabajo.

# Indice

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Modelos integrables en la dinámica de los fluidos</b>	<b>9</b>
<b>2 Campos fermiónicos sobre circunferencias y operadores de vértice</b>	<b>19</b>
2.1 La identidad bilineal . . . . .	19
2.2 La realización mediante operadores de vértice de campos fermiónicos con una componente . . . . .	21
2.3 La realización en términos de operadores de vértice de campos fermiónicos con $N$ componentes . . . . .	24
2.4 Realización de las identidades bilineales en términos de operadores de vértice . . . . .	26
2.5 Ecuaciones de Hirota . . . . .	26
2.6 Método de obtención de soluciones de la identidad bilineal . . . . .	28
2.7 Ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili y Korteweg de Vries . . . . .	30
<b>3 Sistema Boussinesq</b>	<b>39</b>
3.1 Sistema Boussinesq como reducción de la jerarquía de KP en dos componentes . . . . .	39
3.2 Obtención de soluciones solitónicas mediante el formalismo bilineal . . . . .	42
3.2.1 Soluciones solitónicas básicas . . . . .	42
3.2.2 Soluciones solitónicas de Kaup . . . . .	48
<b>4 La ecuación de Davey-Stewartson</b>	<b>57</b>
4.1 La ecuación de Davey-Stewartson como reducción de la jerarquía de KP en dos componentes . . . . .	57



4.2	Soluciones de la ecuación de DS en términos de operadores de vértice . . . . .	59
4.3	Estructuras coherentes. El dromión . . . . .	65
4.4	Dinámica de dromiones. . . . .	69
4.4.1	Movimiento asintótico de dromiones . . . . .	70
4.4.2	Movimiento asintótico de los potenciales . . . . .	72
4.5	Tipos especiales de soluciones . . . . .	74
4.5.1	Fusión y fisión de dromiones . . . . .	75
4.5.2	Dromiones que no cambian de forma bajo interacción . . . . .	78
4.5.3	Procesos de interacción de kinks . . . . .	83
4.5.4	Otras estructuras coherentes bidimensionales . . . . .	86
5	Estructuras coherentes localizadas en dimensión arbitraria . . . . .	91
5.1	Soluciones localizadas de la jerarquía KP en $N$ componentes . . . . .	91
5.2	Sistema integrable $(3+1)$ -dimensional . . . . .	96
6	Otras perspectivas: jerarquías BKP . . . . .	101
6.1	Jerarquía BKP en una componente . . . . .	103
6.2	Jerarquía BKP en dos componentes . . . . .	105

# Introducción

El tema central de esta tesis son los solitones. Estos objetos dinámicos fueron introducidos por Kruskal y Zabusky a mediados de los años 60 en conexión con un modelo de la dinámica de fluidos, la ecuación de Korteweg de Vries, propuesto a finales del siglo XIX. Durante las dos últimas décadas la historia de los solitones ha estado estrechamente ligada al desarrollo de la rica y profunda teoría matemática de los sistemas integrables en  $1+1$  dimensiones. En todos ellos como propiedad característica, aparecen solitones con los rasgos distintivos de ser ondas exponencialmente localizadas que se propagan sin deformación asintóticamente y que emergen de la interacción sin cambiar ni su forma ni su velocidad.

La motivación principal de este trabajo es el descubrimiento de solitones en  $2+1$  dimensiones, realizado por Boiti en 1989. Además, estos solitones han aparecido en un importante modelo no lineal de la dinámica de los fluidos que es la ecuación de Davey-Stewartson

$$iq_t + q_{xx} + q_{yy} + (U_1 + U_2)q = 0,$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^y dy' |q|_x^2 + u_1, \quad (0.1)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' |q|_y^2 + u_2$$

y manifiestan una serie de importantes propiedades dinámicas diferentes de las conocidas para los solitones en  $1+1$  dimensiones, como el cambio de forma en su interacción. A partir de este hallazgo nuestros objetivos iniciales han sido los siguientes

- Estudiar las propiedades de los solitones de la ecuación de DS.
- Investigar la posible existencia de solitones en otros modelos en  $2+1$  ó más dimensiones.

Para acometer nuestra tarea hemos utilizado la técnica basada en el formalismo fermiónico de la escuela de Kyoto (FFK) introducido por Date et al [11,15,32]. A nuestro juicio este formalismo es la mejor herramienta surgida de la teoría de sistemas integrables en 1+1 dimensiones para analizar problemas en más dimensiones. Entre otras razones esto es debido a lo siguiente

- El método del scattering inverso en una dimensión no ha sido aún generalizado a dimensiones superiores.
- Métodos basados en problemas de Riemann-Hilbert de tipo no local, que han sido aplicados a modelos en 2+1 dimensiones, conducen al manejo de demasiadas variables dependientes en complicadas relaciones de recurrencia para determinar las ecuaciones del modelo. Además, la obtención de soluciones explícitas es mucho más difícil que en los casos en 1+1 dimensiones.
- Las generalizaciones surgidas de las técnicas de transformaciones de Backlund superan nuestra capacidad de sufrimiento.

La gran ventaja del FFK es la economía en el conjunto de variables dependientes que utiliza. Tales variables son las famosas funciones  $\tau$  introducidas por Hirota [26,27] en la teoría de sistemas integrables. Este hecho explica también la sencillez con que se obtienen soluciones explícitas en este formalismo; es bien conocido el prestigio ganado por Hirota como "pescador" de solitones a través de sus "curiosas" funciones.

El FFK gira sobre las siguientes ideas clave

- Una jerarquía de sistemas integrables es una estructura ligada a ciertas órbitas de un grupo de Lie de dimensión infinita actuando en un cierto espacio funcional.
- Los puntos de las órbitas son las funciones  $\tau$ .
- Los sistemas integrables son ecuaciones en las funciones  $\tau$  que caracterizan la órbita dentro del espacio funcional ambiente

El paso de las ideas a los objetos explícitos se produce de la forma siguiente

- Mediante expresiones cuadráticas en campos fermiónicos sobre circunferencias se construyen álgebras de Lie de un cierto tipo que generan los grupos del formalismo.

- La realización de los campos fermiónicos como operadores de vértice proporciona una representación de los grupos como operadores en un espacio funcional cuyos elementos son funciones dependientes de un número infinito de variables.
- Los grupos del formalismo poseen la propiedad de dejar invariante una determinada expresión cuadrática en los campos fermiónicos. Así, a través de la representación por operadores de vértice, se deducen ecuaciones invariantes bajo tales grupos. Estas ecuaciones son ecuaciones bilineales del tipo de Hirota [32] y constituyen las jerarquías de sistemas integrables.
- Las propiedades de nilpotencia de las variables fermiónicas permiten determinar de manera sencilla diversos tipos de soluciones no triviales de los sistemas integrables.

Para comprender el contenido de esta tesis es quizás conveniente contar su desarrollo. El punto de partida de nuestro análisis fué el estudio de los solitones de la ecuación de DS mediante el FFK realizado por Jaulent-Manna-Martínez Alonso [29]. En este trabajo se consideró la ecuación de DS como un miembro de la jerarquía de KP en dos componentes y se demostró que las soluciones multisolitónicas podían estudiarse de manera sencilla con las técnicas propias del FFK. En una primera etapa nos dedicamos a investigar con detalle las propiedades de tales soluciones. El resultado más sugestivo que obtuvimos fué la caracterización de soluciones multisolitónicas en que se crean o se aniquilan solitones. Posteriormente, nos tentó la ambición y buscamos modelos con solitones en más de 2+1 dimensiones. Como resultado de esta tentativa encontramos un modelo integrable en 3+1 dimensiones y un método para generar modelos en dimensiones arbitrarias. Sin embargo, tales modelos son sistemas sobredeterminados cuya relevancia nos es desconocida. Buscando mejor suerte rebajamos nuestras pretensiones *junto con la dimensión de los modelos considerados e investigamos la jerarquía BKP [44] en 2 componentes*. Allí, encontramos un sistema integrable en 2+1 dimensiones

$$\begin{aligned} q_t &= q_{xx} + q_{yy} + \delta(q u_1)_x + \delta(q u_2)_y, \\ u_{1y} &= q_x, \quad u_{2x} = q_y. \end{aligned} \quad (0.2)$$

que generaliza a la ecuación de KdV y que posee solitones de tipo pulsante.

Desde el comienzo de nuestro estudio del FFK estuvimos trabajando con la jerarquía de KP en dos componentes. Uno de los miembros más simples de tal jerarquía es el llamado sistema Bousinesq

$$\begin{aligned} u_t + u u_x + w_x &= 0, \\ w_t + u w_x + (u w)_x &= 0, \end{aligned} \quad (0.3)$$

que es un modelo relevante en hidrodinámica. La aplicación del FFK arroja de manera inmediata un prototipo de solitón para (0.3). Una de nuestras obsesiones durante los últimos años ha sido el hecho de que este solitón era completamente diferente del obtenido por Kaup [34,35] hace ya algún tiempo. Es bien conocido que los solitones de Kaup se comportan como todos sus compañeros en 1+1 dimensiones. Sin embargo, hemos encontrado que nuestros solitones de (0.3) no se comportan así sino que realizan procesos de creación y aniquilación. A la luz de estos resultados, una de las conclusiones de esta tesis es la necesidad de revisar el concepto clásico de solitón para admitir estas nuevas propiedades dinámicas.

El orden en que hemos organizado la presentación de nuestro trabajo no se corresponde con el orden temporal en que ha sido realizado. Hemos preferido ceñirnos a un criterio de progresión desde lo más sencillo a lo más complejo. Así, el contenido de los 6 capítulos de que consta es el siguiente:

El primer capítulo es una exposición de los sistemas integrables que aparecen en la dinámica de fluidos. A partir de las ecuaciones físicas básicas se indica como el método de escalas múltiples proporciona una serie de ecuaciones no lineales que resultan ser integrables, como por ejemplo las ecuaciones de KdV, KP, Boussinesq, Schrödinger no lineal y DS.

En el capítulo 2 se introducen la mayor parte de las herramientas matemáticas del FFK que utilizamos, y se construyen las jerarquías de KP con  $N$  componentes. Como ejemplos ilustrativos se estudian con detalle los solitones de las ecuaciones de KdV y KP.

El capítulo 3 inicia el estudio de la jerarquía de KP en dos componentes con la consideración de uno de sus miembros más distinguidos, el sistema Boussinesq. Este capítulo contiene uno de los resultados de la tesis: la caracterización de solitones de (0.3) que manifiestan procesos de creación y aniquilación. También mediante el FFK pueden encontrarse los solitones de Kaup, y se comprueba que no cambian su forma como resultado de la interacción.

La ecuación de DS es el tema sobre el que trata el capítulo 4. En él se incluye una descripción detallada de la dinámica de los solitones de DS, así como de otros tipos de soluciones que describen estructuras localizadas coherentes. Los resultados más interesantes son

- Obtención de una solución multisolitónica más general que las consideradas en [21,22,47].
- Caracterización de las trayectorias asintóticas de los solitones.
- Determinación de soluciones en que se producen procesos de fusión y fisión de solitones.

El capítulo 5 contiene una aplicación del FFK para determinar modelos integrables en  $N+1$  dimensiones en la jerarquía de KP con  $N$  componentes. Se obtiene un modelo en  $3+1$  dimensiones que admite solitones con un sugestivo aspecto de tipo tornado, pero que resulta ser sobredeterminado.

En el capítulo 6 se describe una aplicación del FFK basada en las jerarquías de BKP. Se determina un modelo integrable dado por (0.2), que admite solitones pulsantes de tipo "breather" y que poseen propiedades dinámicas similares a los solitones de DS.

Para finalizar esta introducción queremos incluir algunas impresiones e incertidumbres sobre ciertas cuestiones relacionadas con nuestro trabajo.

- ¿ Por qué aparecen un número considerable de modelos integrables al aplicar el método de escalas múltiples a las ecuaciones de la dinámica de fluidos? Podría existir una relación entre el método de las escalas múltiples y el FFK. Un posible síntoma positivo sería la demostración de que miembros de órdenes superiores de las jerarquías de KP también son relevantes en la dinámica de fluidos.
- ¿ Hay otros modelos integrables en  $1+1$  dimensiones como (0.3) que admitan creación y aniquilación de solitones? Es necesario explorar las reducciones de las jerarquías de KP y BKP con más de una componente.
- Creemos que existen numerosos sistemas integrables con solitones en  $2+1$  dimensiones. Una forma de encontrarlos podría ser a través de reducciones de las jerarquías de KP y BKP con más de dos componente.
- ¿ Hay sistemas integrables no sobredeterminados en  $N+1$  dimensiones ( $N \geq 3$ )? En el caso de no encontrarlos quizás fuera interesante investigar los sobredeterminados.



## Capítulo 1

# Modelos integrables en la dinámica de los fluidos

En este capítulo queremos ilustrar como los sistemas integrables que abordaremos posteriormente, aparecen al intentar describir la dinámica de los fluidos en ciertas condiciones y bajo aproximaciones que precisaremos en cada caso. En primer lugar vamos a considerar el caso de un fluido incompresible situado en un campo gravitatorio constante y tal que tanto la tensión superficial como la viscosidad sean despreciables [51]. Entonces las ecuaciones que describen el movimiento del fluido [51] son:

· Ecuación de conservación de la masa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.1a)$$

· Ecuación de variación del momento lineal:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g \vec{e}_3. \quad (1.1b)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector velocidad en cada punto del fluido,  $\rho$  la densidad, que hemos supuesto constante,  $p$  el campo de presión del fluido,  $g$  la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y  $\vec{e}_3$  es un vector unitario en la dirección del eje  $z$ .

Definiendo el vector vorticidad como  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ , la ecuación (1.1b) puede describirse de la forma:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) + \vec{\omega} \wedge \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g \vec{e}_3, \quad (1.2)$$



tomando ahora el rotacional y teniendo en cuenta (1.1a) obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u},$$

de donde vemos que si inicialmente  $\vec{\omega} = 0$ , entonces la vorticidad permanece nula; como en los problemas de propagación de ondas en el agua que abordaremos a continuación supondremos que  $\vec{\omega} = 0$  en el momento inicial, el argumento es aplicable. Podemos por tanto definir un potencial de velocidades  $\varphi$  tal que:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1.3a)$$

e introduciendo (1.3a) en (1.2), donde ya hemos tomado  $\vec{\omega} = 0$ , obtenemos:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\varphi_t - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \varphi|^2 - gz \quad (1.3b)$$

donde la constante  $p_0$  podemos elegirla arbitrariamente ya que (1.3a) define el potencial  $\varphi$  salvo una función temporal. Las ecuaciones (1.3) determinan la velocidad y la presión del fluido en cada punto en función del potencial de velocidades, luego necesitamos determinar  $\varphi$  para conocer la dinámica del fluido.

A partir de (1.1a) y (1.3a) vemos que el potencial de velocidades satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.4)$$

Queremos ahora encontrar las condiciones de contorno; para ello suponemos que el fluido considerado se haya en un canal, estando limitado por una superficie rígida en el fondo:  $z = -h_0(x, y)$  y una superficie libre  $z = \eta(x, y, t)$  de interfase entre el fluido y el aire (hemos considerado el origen del eje  $z$  en la superficie libre del fluido en reposo). En la superficie libre es necesario imponer dos condiciones: por una parte la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie debe coincidir con la componente de la velocidad de la superficie normal a sí misma, ya que el fluido no puede cruzar la interfase. Esta condición es una condición cinemática y puede expresarse como:

$$\eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_y \eta_y = \varphi_z, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (1.5a)$$

Además, la presión debe coincidir en ambos lados de la interfase, condición dinámica. Suponiendo la presión del aire constante y eligiendo la constante  $p_0$  de (1.3b) igual a la presión del aire encontramos:

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (1.5b)$$

Sobre la superficie del fondo, la única condición que debemos imponer es que la velocidad normal del fluido debe ser nula, ya que hemos supuesto el fondo rígido; es decir:

$$\varphi_z + \varphi_x h_{0x} + \varphi_y h_{0y} = 0, \quad z = -h_0(x, y).$$

En particular si consideramos canales de fondo horizontal  $z = -h_0$ , la condición en el fondo se reduce a:

$$\varphi_z = 0, \quad z = -h_0. \quad (1.6)$$

El problema está ya completamente formulado por (1.4) (1.5) y (1.6) como

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 & -h_0 < z < \eta(x, y, t) \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_y \eta_y &= \varphi_z & z = \eta(x, y, t) \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta &= 0 & z = -h_0 \\ \varphi_z &= 0 & z = -h_0 \end{aligned} \right\}$$

Una primera aproximación a la solución puede hacerse suponiendo que  $\varphi$  y  $\eta$  son muy pequeñas y entonces las ecuaciones pueden linealizarse. De las condiciones (1.5) encontramos ahora

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{tt} + g\varphi_z &= 0, \quad z = 0 \\ \eta &= -\frac{1}{g}\varphi_t|_{z=0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Si queremos encontrar una solución al problema linealizado que represente una onda plana que se propaga horizontalmente deberemos tomar para el potencial de velocidades una función de la forma

$$\varphi(x, y, z, t) = Z(z)e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$$

que al introducirlo en (1.4) y (1.6) obtenemos para  $Z(z)$ :

$$Z(z) = \frac{Z(0) \cosh k(z + h_0)}{\cosh kh_0}$$

donde  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ; y teniendo en cuenta (1.7) llegamos a la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \tanh kh_0.$$

Volvamos al problema no linealizado y hagamos las siguientes aproximaciones:

- i) El movimiento tiene lugar en dos dimensiones; es decir  $k_2 = 0$ .
- ii) La longitud de escalas en el eje  $z$  es mucho mayor que la profundidad del fluido, condición que suele expresarse diciendo que el fluido es poco profundo. Podemos expresar esta aproximación como:

$$(kh_0)^2 \ll 1$$

iii) Las amplitudes son pequeñas respecto a la profundidad del canal:

$$\epsilon = \frac{|\eta|_{\max}}{h_0} \ll 1$$

iv) Estas dos últimas cantidades son aproximadamente del mismo orden:

$$(kh_0)^2 = O(\epsilon).$$

Para considerar estas aproximaciones hacemos un cambio de variables consistente en pasar a las variables adimensionales que encontramos al dividir cada variable del problema entre la variable característica asociada. Esto es:

$$z^* = \sqrt{\epsilon} \frac{z}{h_0}; \quad z^* = \frac{z}{h_0}; \quad t^* = \sqrt{\frac{\epsilon g}{h_0}} t; \quad \eta^* = \frac{\eta}{\epsilon h_0}; \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{h_0 \sqrt{\epsilon g h_0}}.$$

Si  $\varphi^*$  es analítica en  $z^* = -1 (z = -h_0)$ , entonces tiene un desarrollo de Taylor convergente

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (z^* + 1)^n \varphi_n(z^*, t^*).$$

Introduciendo este desarrollo en (1.4) y teniendo en cuenta (1.6) encontramos

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z^* + 1)^{2n} \epsilon^n \frac{\partial^{2n} \varphi_0}{\partial z^{*2n}} \quad (1.8)$$

y llevando ahora (1.8) a las condiciones (1.5) sobre la superficie libre, despreciando los términos de orden  $\epsilon^2$  y definiendo  $w = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z^*}$  encontramos:

$$\begin{aligned} \eta_{t^*}^* + \{(1 + \epsilon \eta^*)w\}_{z^*} - \frac{1}{6} \epsilon w_{z^* z^* z^*} &= 0, \\ w_{t^*}^* - \frac{1}{2} \epsilon w_{t^* z^*} + \eta_{z^*}^* + \epsilon w w_{z^*} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Teniendo en cuenta que la componente de la velocidad en la dirección del eje  $z$  hasta orden  $\epsilon$  viene dada por:

$$u = \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*} = w - \frac{1}{2} \epsilon w_{z^* z^*} + O(\epsilon^2)$$

y escribiendo las ecuaciones (1.9) en términos de la velocidad y la altura de la superficie libre obtenemos el sistema Boussinesq:

$$\begin{aligned} \eta_{t^*}^* + \{(1 + \epsilon \eta^*)u\}_{z^*} + \frac{1}{3} \epsilon u_{z^* z^* z^*} &= 0 \\ u_{t^*}^* + \eta_{z^*}^* + \epsilon u u_{z^*} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) puede obtenerse a partir de este sistema considerando el movimiento de las ondas solamente hacia la derecha(izquierda). Supongamos que las funciones  $\eta^*$  y  $u$  admiten un desarrollo perturbativo en el parámetro  $\epsilon$

$$\eta^* = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \eta_n, \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n,$$

a orden 0 en  $\epsilon$  las ecuaciones (1.10) quedan de la forma

$$\eta_{0t^*} + u_{0x^*} = 0, \quad u_{0t^*} + \eta_{0x^*} = 0,$$

y por tanto podemos escribir sus soluciones como:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= f(x^* - t^*) + g(x^* + t^*) \\ u_0 &= f(x^* - t^*) - g(x^* + t^*). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para evitar los términos seculares en las ecuaciones de primer orden utilizamos el método de las escalas múltiples introduciendo una nueva variable temporal más lenta  $\tau = \epsilon t^*$  de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t^*} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Entonces, en orden  $\epsilon$  las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \eta_{1t^*} + u_{1x^*} &= -\{\eta_{0\tau} + (\eta_0 u_0)_{x^*} + \frac{1}{3} u_{0x^*} x^* x^*\} \\ u_{1t^*} + \eta_{1x^*} &= -\{u_{0\tau} + u_0 u_{0x^*}\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

pasando ahora a las variables características  $\tau = x^* - t^*$ ,  $l = x^* + t^*$  e introduciendo (1.11) en (1.12) la condición para que no existan términos seculares viene dada por:

$$\begin{aligned} 2f_{\tau} + 3ff_{\tau} + \frac{1}{3}f_{\tau\tau\tau} &= 0 \\ -2g_{\tau} + 3gg_{\tau} + \frac{1}{3}g_{\tau\tau\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

que son las ecuaciones KdV para el movimiento de las ondas a derecha y a izquierda.

Si en lugar de suponer que el movimiento es estrictamente en dos dimensiones ( $k_2 = 0$ ) suponemos que las ondas son casi-unidimensionales

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = O(\epsilon)$$

es necesario introducir la variable  $y^* = \frac{x_2}{k_0}$ , repitiendo entonces el proceso arriba descrito llegamos a la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili KP

$$(2f_{\tau} + 3ff_{\tau} + \frac{1}{3}f_{\tau\tau\tau})_{\tau} + f_{y^*y^*} = 0 \quad (1.14)$$

Una vez que hemos visto como aparecen el sistema Boussinesq y las ecuaciones KdV y KP para describir la dinámica de los fluidos en los que la tensión superficial es despreciable vamos a indicar como podrían obtenerse las ecuaciones de Schrödinger no lineal y Davey-Stewartson para describir la propagación de una perturbación en la superficie de un fluido en el que la tensión superficial es importante utilizando el método de las escalas múltiples [1], [9], [10], [17], [53]. Al introducir la tensión superficial las ecuaciones (1.4), (1.5a) y (1.6) no cambian, pero la condición dinámica (1.5b) en la superficie libre se transforma ahora [50] en:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta = \frac{T}{\mu} \frac{\eta_{xx}(1 + \eta_y^2) + \eta_{yy}(1 + \eta_x^2) - 2\eta_{xy}\eta_x\eta_y}{(1 + \eta_x^2\eta_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

para  $z = \eta(x, y, t)$ . En este caso supondremos que las ondas que se generan como resultado de la perturbación son de amplitud pequeña, además debido a su naturaleza dispersiva lo que encontramos son paquetes de ondas casi-unidimensionales y casi-monocromáticas. Hacemos entonces las siguientes aproximaciones [1]:

- i) Las amplitudes son pequeñas, es decir  $\epsilon \equiv ka \ll 1$  siendo  $a$  una amplitud característica.
- ii) Las ondas son casi-monocromáticas  $\frac{\delta\kappa}{\kappa} \ll 1$  siendo  $\vec{\kappa} = (k, l)$  el número de ondas,  $(\kappa^2 = k^2 + l^2)$  y  $\delta\kappa$  una variación característica en  $\kappa$ .
- iii) Las ondas son casi-unidimensionales  $\frac{|l|}{\kappa} \ll 1$ .
- iv) Los tres efectos anteriores son aproximadamente del mismo orden

$$\frac{\delta\kappa}{\kappa} = O(\epsilon), \quad \frac{|l|}{\kappa} = O(\epsilon).$$

En este caso la solución al problema linealizado viene dada por:

$$\varphi \sim \left\{ \frac{\cosh k(z + h_0)}{\cosh kh_0} [\tilde{A}e^{i\theta} + \tilde{A}^*e^{-i\theta}] + C \right\}$$

donde  $*$  denota complejo conjugado y  $\theta = kx - \omega t$  siendo la relación de dispersión:

$$\omega^2 = (\kappa g + \kappa^3 T) \tanh kh_0.$$

Para ir a un orden superior utilizamos el método de las escalas múltiples; introduciendo las variables:

$$x_1 = \epsilon x, \quad y_1 = \epsilon y, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t$$

tenemos en términos de las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \varphi = & \epsilon \{ \tilde{\Phi}(x_1, y_1, t_1, t_2) + \frac{\cosh k(z + h_0)}{\cosh kh_0} [\tilde{A}(x_1, y_1, t_1, t_2)e^{i\theta} + \\ & \tilde{A}^*(x_1, y_1, t_1, t_2)e^{-i\theta}] \} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\eta = \epsilon \{ \bar{\eta}_{11} e^{i\theta} + \bar{\eta}_{11}^* e^{-i\theta} \} + O(\epsilon^2)$$

siendo

$$\bar{\eta}_{11} = \frac{i\omega}{g + \kappa^2 T} \bar{A}$$

donde imponemos como condición de contorno que  $\bar{\Phi}$  se anule cuando  $(x_1^2 + y_1^2) \rightarrow \infty$ . Tomando el límite  $t_1 \rightarrow \infty$  en la condición que es necesario imponer para que no existan términos seculares en orden  $\epsilon^2$  encontramos las ecuaciones

$$iA_\tau + \lambda A_{\xi\xi} + \mu A_{\eta\eta} = \chi |A|^2 A + \chi_1 A \Phi_\xi, \quad (1.15a)$$

$$\alpha \Phi_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\eta\eta} = -\beta(|A|^2)_\xi, \quad (1.15b)$$

donde hemos pasado a variables adimensionales realizando el cambio de variables:

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon \kappa (x - c_g t), & \eta &= \epsilon \kappa y, & c_g &= \frac{\partial \omega}{\partial \kappa}, \\ \tau &= \epsilon^2 (g \kappa)^{\frac{1}{2}} t, \\ A &= \kappa^2 (g \kappa)^{\frac{1}{2}} \bar{A}, & \bar{\Phi} &= \kappa^2 (g \kappa)^{\frac{1}{2}} \bar{\Phi}, \end{aligned}$$

y hemos introducido:

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{th} \kappa h_0, & \bar{T} &= \frac{\kappa^2 T}{g}, \\ \omega^2 &= g \kappa \sigma (1 + \bar{T}), & \omega_0^2 &= g \kappa, \\ \lambda &= \frac{\kappa^2 g^{\frac{3}{2}}}{2 \omega_0}, & \mu &= \frac{\kappa c_g}{2 \omega_0}, \\ \chi &= \frac{\omega_0}{4 \omega} \left\{ \frac{(1 - \sigma^2)(9 - \sigma^2) + \bar{T}(2 - \sigma^2)(7 - \sigma^2)}{\sigma^2 - \bar{T}(3 - \sigma^2)} + 8 \sigma^2 - \right. \\ &\quad \left. 2(1 - \sigma^2)^2(1 + \bar{T}) - \frac{3 \sigma^2 \bar{T}}{1 + \bar{T}} \right\}, \\ \chi_1 &= 1 + \frac{\kappa c_g}{2 \omega} (1 - \sigma^2)(1 + \bar{T}) \\ \alpha &= \frac{g h - c_g^2}{g h}, \\ \beta &= \frac{\omega}{\omega_0 \kappa h} \left\{ \frac{\kappa c_g}{\omega} (1 - \sigma^2) + \frac{2}{(1 + \bar{T})} \right\}. \end{aligned}$$

Si consideramos el caso de un fluido profundo (suponemos que se satisface el límite  $\kappa h \rightarrow \infty$ ) la ecuación (1.15b) se reduce a  $\bar{\nabla} \bar{\Phi} = 0$  mientras que de (1.15a) obtenemos:

$$iA_\tau + \lambda_\infty A_{\xi\xi} + \mu_\infty A_{\eta\eta} = \chi_\infty |A|^2 A \quad (1.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_\infty &= -\frac{\omega_0}{8 \omega} \left( \frac{1 - 6\bar{T} - 3\bar{T}^2}{1 + \bar{T}} \right), \\ \mu_\infty &= \frac{\omega_0}{4 \omega} (1 + 3\bar{T}) \geq 0, \\ \chi_\infty &= \frac{\omega_0}{4 \omega} \cdot \frac{8 + \bar{T} + 2\bar{T}^2}{(\bar{T} - 2\bar{T})(1 + \bar{T})}, \end{aligned}$$

en el caso de que el efecto de la tensión superficial sea superior al del campo gravitatorio  $\tilde{T} \gg 1$  tenemos que  $\lambda_\infty \geq 0$  y (1.16) es la ecuación de Schrödinger no lineal en (2+1) dimensiones. La situación cambia si consideramos el caso de un fluido poco profundo ( $\kappa h \rightarrow 0$ ). Realizando este límite en las ecuaciones (1.15) y reescalando encontramos:

$$iA_t - \sigma A_{x'x'} + A_{y'y'} = \sigma |A|^2 A + A\Phi_{x'}, \quad (1.17b)$$

$$\sigma \Phi_{x'x'} + \Phi_{y'y'} = -2(|A|^2)_{x'}, \quad (1.17c)$$

donde  $\sigma = \text{sgn}(\frac{1}{3} - \tilde{T})$ , considerando de nuevo que la tensión superficial es más importante que el campo gravitatorio,  $\sigma = -1$ . Introduciendo ahora el cambio de variables

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$$

y definiendo los potenciales

$$U_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_x + \frac{1}{2}|A|^2, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_y + \frac{1}{2}|A|^2,$$

las ecuaciones (1.17) se reducen a:

$$\begin{aligned} iA_t + A_{xx} + A_{yy} + (U_1 + U_2)A &= 0 \\ U_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^y |A|^2 dy' + u_1(x, t) \\ U_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x |A|^2 dx' + u_2(y, t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde la ecuación (1.18) es conocida como ecuación de Davey-Stewartson (DS).

Para finalizar este capítulo vamos a recordar los modelos encontrados. En primer lugar, para fluidos poco profundos en los que el efecto de la tensión superficial es despreciable encontramos que su dinámica puede venir descrita por el sistema Boussinesq o las ecuaciones de Korteweg-de Vries KdV o Kadomtsev-Petviashvili KP. Sin embargo si para el fluido considerado el efecto de la tensión superficial es más importante que el del campo gravitatorio, entonces su dinámica queda descrita por la ecuación de Schrödinger no lineal en (2+1) dimensiones si se trata de un fluido profundo, mientras que es la ecuación de Davey-Stewartson DS la que rige su comportamiento si el fluido es poco profundo.

La forma que hemos obtenido para la ecuación DS en (1.18) es la misma que utilizaremos posteriormente en el formalismo fermiónico, sin embargo no ocurre lo mismo para el sistema Boussinesq o las ecuaciones KdV y

KP. Para escribir el sistema Boussinesq en la forma que nos aparecerá posteriormente, tomamos en (1.10)  $\epsilon = 1$  y realizamos el cambio de variables

$$w = 1 + \eta^*, \quad x^* = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{3}},$$

entonces el sistema (1.10) se transforma en:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + w_x &= 0, \\ w_t + u_{xxx} + (uw)_x &= 0, \end{aligned}$$

que es la expresión del sistema Boussinesq con la que trabajaremos en el capítulo 3. Análogamente haciendo el cambio de variables

$$f = 2u, \quad \tau = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y^* = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad \tau = \frac{2}{\sqrt{3}}t,$$

las ecuaciones (1.13) y (1.14) se convierten respectivamente en:

$$\begin{aligned} u_t + 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \\ (u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

expresiones que usaremos para las ecuaciones KdV y KP en el capítulo 2.





## Capítulo 2

# Campos fermiónicos sobre circunferencias y operadores de vértice

### 2.1 La identidad bilineal

En este capítulo vamos a introducir el formalismo que utilizamos para encontrar jerarquías de sistemas integrables y analizar sus reducciones a partir de las propiedades de ciertas álgebras de Lie [11], [16], [19], [32] así como para construir soluciones a dichos sistemas. Para ello partimos de unos operadores que denominaremos fermiones libres  $\psi_n^{(i)}, \psi_n^{(i)*}$  ( $n \in \mathbb{Z}; i = 1, \dots, N$ ) que supondremos definidos sobre un espacio  $\mathcal{F}$ , satisfaciendo las relaciones canónicas de anticonmutación:

$$\{\psi_n^{(i)}, \psi_m^{(j)}\} = \{\psi_n^{(i)*}, \psi_m^{(j)*}\} = 0; \quad \{\psi_n^{(i)}, \psi_m^{(j)*}\} = \delta^{ij} \delta_{nm}.$$

Consideramos ahora los productos cuadráticos de la forma  $\psi_n^{(i)} \psi_m^{(j)*}$ ; de las relaciones canónicas de anticonmutación para los fermiones libres podemos encontrar

$$[\psi_n^{(i)} \psi_m^{(j)*}, \psi_p^{(k)} \psi_q^{(l)*}] = \delta^{kj} \delta_{pm} \psi_n^{(i)} \psi_q^{(l)*} - \delta^{il} \delta_{nq} \psi_p^{(k)} \psi_m^{(j)*}$$

de donde deducimos que los productos  $\psi_n^{(i)} \psi_m^{(j)*}$  generan un álgebra de Lie. Este álgebra puede extenderse introduciendo las constantes, al álgebra resultante la llamaremos  $gl(N\infty)$ . La exponenciación del álgebra  $gl(N\infty)$  nos conduce a un grupo de Lie que denotaremos por  $Gl(N\infty)$ . Elementos

típicos de este grupo son por ejemplo expresiones como

$$g = \exp A, \quad A = \sum_{i,j=1}^N \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{nm}^{ij} \psi_n^{(i)} \psi_m^{(j)*} + c \cdot 1.$$

A partir de las relaciones de anticonmutación tenemos que:

$$[A, \psi_m^{(j)}] = \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} a_{nm}^{ij}; \quad [A, \psi_n^{(i)*}] = - \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{nm}^{ij} \psi_m^{(j)*}. \quad (2.1)$$

Definimos ahora las representaciones adjuntas ad  $A$  y  $\tilde{\text{ad}} A$  del álgebra  $gl(N\infty)$  mediante

$$[A, \psi_n^{(i)}] = \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\text{ad } A)_{nm}^{ij} \psi_m^{(j)}$$

$$[A, \psi_n^{(i)*}] = \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\tilde{\text{ad}} A)_{nm}^{ij} \psi_m^{(j)*}$$

de (2.1) se deduce que:

$$\text{ad } A = -(\tilde{\text{ad}} A)^T = a^T$$

siendo  $(a)_{nm}^{ij} = a_{nm}^{ij}$ . Entonces, es fácil ver que:

$$g \psi_m^{(j)} g^{-1} = \exp(\text{ad } A) \psi_m^{(j)} = \exp(a^T) \psi_m^{(j)} = \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} \lambda_{nm}^{ij}$$

$$g^{-1} \psi_n^{(i)*} g = \exp(-\tilde{\text{ad}} A) \psi_n^{(i)*} = \exp(a) \psi_n^{(i)*} = \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_{nm}^{ij} \psi_m^{(j)*}$$

donde los coeficientes  $\lambda_{nm}^{ij}$  están definidos por  $\lambda_{nm}^{ij} = [\exp(a)]_{nm}^{ij}$ . Encontramos entonces, la importante propiedad:

$$g \psi_m^{(j)} = \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} g \lambda_{nm}^{ij}; \quad \psi_n^{(i)*} g = \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_{nm}^{ij} g \psi_m^{(j)*}. \quad (2.2)$$

Definimos ahora el operador  $C$  como:

$$C \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} \otimes \psi_n^{(i)*};$$

este operador actúa sobre  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ , y queremos encontrar los vectores  $\tau$  y  $\tau'$  en  $\mathcal{F}$  que satisfagan

$$C\tau \otimes \tau' = 0. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) es conocida como identidad bilineal, siendo su principal propiedad la invariancia del conjunto de sus soluciones bajo la acción del grupo  $GL(N\infty)$  [33], [32], [49]. Para probar esta propiedad basta con ver que si  $g \in GL(N\infty)$  el operador  $C$  conmuta con  $g \otimes g$  lo que puede demostrarse fácilmente utilizando (2.2)

$$\begin{aligned} Cg \otimes g &= \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} g \otimes \psi_n^{(i)*} g = \sum_{i,j=1}^N \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} g \otimes \lambda_{nm}^{ij} g \psi_m^{(j)*} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} g \psi_m^{(j)} \otimes g \psi_m^{(j)*} = g \otimes g C. \end{aligned}$$

De este modo si  $\tau, \tau'$  son soluciones de (2.3) entonces

$$Cg\tau \otimes g\tau' = g \otimes g C\tau \otimes \tau' = 0,$$

luego  $g\tau$  y  $g\tau'$  son también soluciones. Esta propiedad nos permitirá, a partir de soluciones conocidas de (2.3) encontrar nuevas soluciones.

Queremos ahora escribir la identidad bilineal en forma integral, para ello definimos los campos fermiónicos

$$\psi^{(i)}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)} k^n, \quad \psi^{(i)*}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(i)*} k^{-n}, \quad k \in \gamma$$

donde  $\gamma$  es la circunferencia  $|k| = R$  en el plano complejo, orientada positivamente. Entonces (2.3) puede escribirse como

$$\left\{ \oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \sum_{i=1}^N \psi^{(i)}(k) \otimes \psi^{(i)*}(k) \right\} \tau \otimes \tau' = 0 \quad (2.4)$$

## 2.2 La realización mediante operadores de vértice de campos fermiónicos con una componente

Como dijimos al principio de este capítulo, queremos obtener jerarquías de ecuaciones diferenciales; para ello vamos a buscar una realización de los campos fermiónicos en términos de operadores que dependan de ciertas

variables complejas y las derivadas respecto de dichas variables [12], [13]. Empezamos por considerar el caso más sencillo  $N = 1$ .

Sea  $\mathcal{F}$  el espacio lineal de funciones  $\tau(l, x)$  que dependen de un parámetro discreto  $l \in \mathbb{Z}$  y de una colección infinita de variables complejas  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ , y que son analíticas para  $x$  cercano al origen. Sea  $k$  un parámetro complejo; introducimos los operadores de vértice  $\psi(k)$ ,  $\psi^*(k)$  que actúan sobre  $\mathcal{F}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\psi(k)\tau(l, x) &= k^{l-1}e^{\xi(k, x)}\tau(l-1, x - \epsilon(\frac{1}{k})) \\ \psi^*(k)\tau(l, x) &= k^{-l}e^{-\xi(k, x)}\tau(l+1, x + \epsilon(\frac{1}{k}))\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde

$$\xi(k, x) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n x_n, \quad \epsilon(\frac{1}{k}) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \dots, \frac{1}{nk^n}, \dots).$$

Como hemos exigido que las funciones de  $\mathcal{F}$  estén definidas cerca del origen,  $\epsilon(\frac{1}{k})$  debe ser un "vector pequeño" para poder estar seguros de que las funciones están definidas en  $x \pm \epsilon(\frac{1}{k})$ . Esto quiere decir que debe existir  $R_1 : |k| > R_1$ . Pero para que la serie de potencias en  $k$ ,  $\xi(k, x)$ , sea convergente debe cumplirse  $|k| < R_2$  para algún  $R_2$ . De este modo la existencia de  $\psi(k)$  y  $\psi^*(k)$  como operadores en  $\mathcal{F}$  es esperada para valores de  $k$  en alguna corona  $R_1 < |k| < R_2$ .

Denotamos ahora los operadores de vértice mediante  $\psi_{\epsilon}(k)$ ,  $\epsilon = \pm 1$  siendo  $\psi_1(k) \equiv \psi(k)$  y  $\psi_{-1}(k) \equiv \psi^*(k)$ . Queremos ver en que casos tiene sentido en  $\mathcal{F}$  el producto  $\psi_{\epsilon_1}(k_1)\psi_{\epsilon_2}(k_2)\cdots\psi_{\epsilon_n}(k_n)$ . De (2.5) vemos que al realizar estos productos aparecen factores de la forma

$$\exp\left[-\epsilon_i\epsilon_j\xi(k_i, \epsilon(\frac{1}{k_j}))\right] = \exp\left[-\epsilon_i\epsilon_j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)^n\right]$$

la serie converge si  $|k_i| \leq |k_j|$  con  $k_i \neq k_j$ , entonces

$$\exp\left[-\epsilon_i\epsilon_j\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k_i}{k_j}\right)^n\right] = \left(1 - \frac{k_i}{k_j}\right)^{\epsilon_i\epsilon_j}$$

en el caso  $\epsilon_i = \epsilon_j$ , si  $k_i = k_j$  el factor se anula, luego el producto  $\psi_{\epsilon_1}(k_1)\psi_{\epsilon_2}(k_2)\cdots\psi_{\epsilon_n}(k_n)$  tiene sentido en  $\mathcal{F}$  si:

$$|k_1| \geq |k_2| \geq \cdots |k_n|, \quad \text{con } k_i \neq k_j \text{ si } \epsilon_i \neq \epsilon_j$$

Introducimos ahora los operadores  $\psi_n, \psi_n^*$  mediante los desarrollos

$$\psi(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n k^n, \quad \psi^*(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^* k^{-n}$$

o equivalentemente

$$\psi_n = \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-n} \underline{\psi}(k), \quad \psi_n^* = \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} k^n \psi^*(k)$$

siendo  $\gamma$  la circunferencia  $|k| = R$ , orientada positivamente respecto al origen con  $R_1 < R < R_2$ . Queremos demostrar que  $\psi_n, \psi_n^*$  son realizaciones de los fermiones libres definidos anteriormente; con este fin denotaremos por  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \dots)$  y definiremos  $T$  como el operador de translación que actúa sobre  $\mathcal{F}$ :  $Ta(l) = a(l+1)$ , entonces los operadores de vértice pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \psi(k) &= k^{l-1} e^{\xi(k,x)} e^{-\epsilon(\frac{1}{k})} \vec{\nabla} T^{-1} \\ \psi^*(k) &= k^{-l} e^{-\xi(k,x)} e^{\epsilon(\frac{1}{k})} \vec{\nabla} T. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calculamos los productos

$$\begin{aligned} \psi(k)\psi(q) &= (kq)^{l-1} e^{\xi(k,x)+\xi(q,x)} (\frac{1}{q} - \frac{1}{k}) e^{-[\epsilon(\frac{1}{k})+\epsilon(\frac{1}{q})]} \vec{\nabla} T^{-2}, \\ \psi(k)\psi^*(q) &= (\frac{k}{q})^l e^{\xi(k,x)-\xi(q,x)} \frac{q}{k-q} e^{-[\epsilon(\frac{1}{k})-\epsilon(\frac{1}{q})]} \vec{\nabla}, & k \neq q, \\ \psi^*(k)\psi(q) &= (\frac{q}{k})^l e^{-\xi(k,x)+\xi(q,x)} \frac{k}{k-q} e^{[\epsilon(\frac{1}{k})-\epsilon(\frac{1}{q})]} \vec{\nabla}, & k \neq q, \\ \psi^*(k)\psi^*(q) &= (kq)^{-l-1} e^{-\xi(k,x)-\xi(q,x)} (k-q) e^{[\epsilon(\frac{1}{k})+\epsilon(\frac{1}{q})]} \vec{\nabla} T^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde hemos tomado  $|k| \geq |q|$ . Para considerar los anticonmutadores de los operadores  $\psi_n, \psi_n^*$ , será útil introducir de nuevo:

$$\psi_n^{\epsilon} = \begin{cases} \psi_n & \text{si } \epsilon = 1 \\ \psi_n^* & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases} = \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \psi_{\epsilon}(k)$$

y de este modo para el anticonmutador  $\{\psi_n^{\epsilon}, \psi_m^{\epsilon'}\}$  encontramos

$$\begin{aligned} \{\psi_n^{\epsilon}, \psi_m^{\epsilon'}\} &= \left\{ \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \psi_{\epsilon}(k), \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon'}(q) \right\} = \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon}(k) \psi_{\epsilon'}(q) + \\ &+ \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon'}(q) \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \psi_{\epsilon}(k) = \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon}(k) \psi_{\epsilon'}(q) + \\ &+ \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \psi_{\epsilon'}(q) \psi_{\epsilon}(k) = \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \left[ \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon}(k) \psi_{\epsilon'}(q) + \oint_{\gamma_2} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon'}(q) \psi_{\epsilon}(k) \right] \end{aligned}$$

donde  $\gamma_i$  es la circunferencia  $|k| = r_i$  con  $R_1 < r_2 < r_1 < r_3 < R_2$ . Pero de (2.7) vemos que  $\psi_{\epsilon'}(q) \psi_{\epsilon}(k) = -\psi_{\epsilon}(k) \psi_{\epsilon'}(q)$  luego:

$$\{\psi_n^{\epsilon}, \psi_m^{\epsilon'}\} = \oint_{\gamma_1} \frac{dk}{2\pi i k} k^{-\epsilon n} \oint_{\gamma_2 - \gamma_3} \frac{dq}{2\pi i q} q^{-\epsilon' m} \psi_{\epsilon}(k) \psi_{\epsilon'}(q)$$

y particularizando los valores de  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  y teniendo en cuenta de nuevo (2.7) es inmediato que:

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0; \quad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{mn}$$

luego hemos probado que los operadores de vértice (2.6) son una realización de los campos fermiónicos  $\psi(k)$  y  $\psi^*(k)$ . Podemos entonces definir para los operadores de vértice  $\psi_\epsilon(k)$ ,  $\psi_{\epsilon'}(q)$  el anticonmutador siempre que  $|k| = |q|$ , y de lo visto hasta ahora encontramos:

$$\{\psi(k), \psi(q)\} = \{\psi^*(k), \psi^*(q)\} = 0, \quad \{\psi(k), \psi^*(q)\} = \delta_\gamma(k - q), \quad k, q \in \gamma \quad (2.8)$$

siendo  $\gamma$  una circunferencia orientada positivamente alrededor del origen; análogamente podemos escribir:

$$\{\psi_\epsilon(k), \psi_{\epsilon'}(q)\} = (1 - \delta_{\epsilon\epsilon'}) \delta_\gamma(k - q), \quad k, q \in \gamma \quad (2.9)$$

donde la distribución  $\delta_\gamma(k - q)$  está definida por:

$$\oint_\gamma \frac{1}{2\pi i} \frac{dk}{k} \delta_\gamma(k - q) f(k) = f(q)$$

### 2.3 La realización en términos de operadores de vértice de campos fermiónicos con $N$ componentes

Vamos ahora a considerar la generalización de lo visto en la sección anterior para un  $N$  arbitrario, para ello definimos  $\mathcal{F}$  como el espacio lineal de funciones  $\tau(l, z)$  donde  $l = (l_1 \dots l_N)$ ,  $l_i \in \mathbb{Z}$ ;  $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$ ,  $z^{(i)} \in \mathbb{C}^\infty$  y asumimos que son analíticas alrededor de  $z = 0$ . Podemos entonces construir una colección finita de operadores  $B^{(i)}(k)$ ,  $B^{(i)*}(k)$ ,  $i = 1, \dots, N$  en una serie de circunferencias  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) definidos como los operadores  $\psi(k)$ ,  $\psi^*(k)$  en (2.6) y actuando sobre las variables  $l_i$ ,  $z^{(i)}$ . Estos operadores satisfacen las relaciones algebraicas

$$\begin{aligned} [B_\epsilon^{(i)}(k), B_{\epsilon'}^{(j)}(q)] &= 0, \quad \text{si } i \neq j \\ \{B_\epsilon^{(i)}(k), B_{\epsilon'}^{(i)}(q)\} &= (1 - \delta_{\epsilon\epsilon'}) \delta_{\gamma_i}(k - q). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Queremos construir un conjunto de operadores de vértice de la forma

$$\psi_\epsilon^{(i)}(k) = a_\epsilon^{(i)}(k) B_\epsilon^{(i)}(k) \quad (2.11)$$

que satisfagan las relaciones de anticonmutación

$$\{\psi_\epsilon^{(i)}(k), \psi_{\epsilon'}^{(j)}(q)\} = \delta^{ij}(1 - \delta_{\epsilon\epsilon'})\delta_{\gamma_i}(k - q) \quad (2.12)$$

Puede verse que una solución a (2.11)(2.12) viene dada por los operadores  $a_\epsilon^{(i)}(k)$  que verifican:

$$a_\epsilon^{(i)}(k)a_{\epsilon'}^{(j)}(q) = a_{\epsilon'}^{(j)}(q)a_\epsilon^{(i)}(k) \quad (2.13a)$$

$$a_\epsilon^{(i)}(k)a_{-\epsilon}^{(i)}(k) = 1 \quad (2.13b)$$

$$B_\epsilon^{(i)}(k)a_{\epsilon'}^{(j)}(q) = \eta_{\epsilon\epsilon'}^{ij}(k, q)a_{\epsilon'}^{(j)}(q)B_\epsilon^{(i)}(k) \quad (2.13c)$$

donde los coeficientes  $\eta_{\epsilon\epsilon'}^{ij}(k, q)$  satisfacen

$$\eta_{\epsilon\epsilon}^{ii}(k, q) = 1; \quad \eta_{\epsilon\epsilon'}^{ij}(k, q) = -\eta_{\epsilon'\epsilon}^{ji}(q, k), \quad i \neq j \quad (2.13d)$$

lo comprobamos en primer lugar para el anticonmutador con  $i = j$ ; teniendo en cuenta (2.13) encontramos:

$$\begin{aligned} \{\psi_\epsilon^{(i)}(k), \psi_{\epsilon'}^{(i)}(q)\} &= a_\epsilon^{(i)}(k)a_{\epsilon'}^{(i)}(q)\{B_\epsilon^{(i)}(k), B_{\epsilon'}^{(i)}(q)\} = \\ &= a_\epsilon^{(i)}(k)a_{\epsilon'}^{(i)}(q)(1 - \delta_{\epsilon\epsilon'})\delta_{\gamma_i}(k - q) = \\ &= (1 - \delta_{\epsilon\epsilon'})\delta_{\gamma_i}(k - q) \end{aligned}$$

y en el caso  $i \neq j$

$$\{\psi_\epsilon^{(i)}(k), \psi_{\epsilon'}^{(j)}(q)\} = [\eta_{\epsilon\epsilon'}^{ij}(k, q) + \eta_{\epsilon'\epsilon}^{ji}(q, k)]a_\epsilon^{(i)}(k)a_{\epsilon'}^{(j)}(q)B_\epsilon^{(i)}(k)B_{\epsilon'}^{(j)}(q) = 0$$

Este resultado es también válido si consideramos los  $N$  campos en la misma circunferencia, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} B^{(i)}(k) &= k^{l_i-1} e^{\xi(k, x^{(i)})} e^{-\epsilon(\frac{1}{2})\vec{\nabla}^{(i)}} T_i^{-1} \\ B^{(i)*}(k) &= k^{-l_i} e^{-\xi(k, x^{(i)})} e^{\epsilon(\frac{1}{2})\vec{\nabla}^{(i)}} T_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $T_i$  es el operador de transtación que actúa sobre  $\mathcal{F}$  como  $T_i a(l) = a(l + \epsilon_i)$  siendo  $\epsilon_i$  el vector en  $\mathbb{Z}^N$  de componentes  $(\epsilon_i)_j = \delta_{ij}$ . Es inmediato comprobar que una solución a (2.13) viene en este caso dada por:

$$a_\epsilon^{(i)}(k) = (-1)^{\sum_{j>i} l_j} \quad (2.15)$$

De este modo obtenemos los operadores de vértice en  $N$  componentes dados por:

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}(k) &= (-1)^{\sum_{j>i} l_j} k^{l_i-1} e^{\xi(k, x^{(i)})} e^{-\epsilon(\frac{1}{2})\vec{\nabla}^{(i)}} T_i^{-1} \\ \psi^{(i)*}(k) &= (-1)^{\sum_{j>i} l_j} k^{-l_i} e^{-\xi(k, x^{(i)})} e^{\epsilon(\frac{1}{2})\vec{\nabla}^{(i)}} T_i \end{aligned} \quad (2.16)$$

que constituyen una realización de los campos fermiónicos.



## 2.4 Realización de las identidades bilineales en términos de operadores de vértice

Hemos visto que los operadores de vértice son una realización de los campos fermiónicos  $\psi^{(i)}(k)$ ,  $\psi^{(i)*}(k)$  en  $\mathcal{F}$ . Podemos entonces escribir la identidad (2.4) en la forma

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \sum_{i=1}^N \psi^{(i)}(k) \tau(l, z) \psi^{(i)*}(k) \tau'(l', z') = 0$$

siendo  $l$  y  $l'$  vectores arbitrarios en  $\mathbb{Z}^N$  y  $z, z'$  conjuntos de  $N$  colecciones infinitas de variables complejas próximas al origen. Utilizando ahora la expresión de los operadores de vértice podemos escribir la identidad bilineal como

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\gamma} dk \{ (-1)^{\sum_{j>i} (l_j + l'_j)} k^{l_i - l'_i - 2} e^{\ell(k, z^{(i)} - z'^{(i)})} \cdot \tau(l - e_i, z - \epsilon(\frac{1}{k})) \tau'(l' + e_i, z' + \epsilon(\frac{1}{k})) \} = 0 \quad (2.17)$$

expresión que es conocida como identidad bilineal para la jerarquía de Kadomtsev-Petviashvili (KP) en  $N$  componentes.

## 2.5 Ecuaciones de Hirota

En esta sección vamos a encontrar las ecuaciones diferenciales que pueden obtenerse de la ecuación bilineal (2.17). Con este fin nos resultará útil introducir los operadores bilineales de Hirota [27]. Dada una función analítica  $P(z)$  de  $z \in \mathbb{C}^{N\infty}$  el operador de Hirota  $P(D)$  ( $D = (D^{(1)}, \dots, D^{(N)})$ ;  $D^{(i)} = (D_1^{(i)}, \dots, D_n^{(i)}, \dots)$ ) que actúa sobre productos ordenados  $\alpha(z) \cdot \beta(z)$  está definido como

$$P(D) \alpha(z) \cdot \beta(z) = P(\partial' - \partial'') \alpha(z') \beta(z'')|_{z'=z''=z} \quad (2.18)$$

donde  $\partial = (\partial^{(1)}, \dots, \partial^{(N)})$  con  $\partial^{(i)} = (-\frac{\partial}{\partial z_1^{(i)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n^{(i)}})$ , denotando ahora

$$aD = \sum_{i=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{(i)} D_n^{(i)}$$

es fácil ver de (2.18) que se satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned} D_{n_1}^{(i_1)m_1} \dots D_{n_j}^{(i_j)m_j} \alpha(z) \cdot \alpha(z) &= 0 \text{ si } m_1 + \dots + m_j = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \exp(aD) \alpha(z) \cdot \beta(z) &= \alpha(z+a) \beta(z-a) \end{aligned} \quad (2.19)$$

La última de estas propiedades nos ayudará a analizar las identidades bilineales (2.17). En efecto, realizando en (2.17) el cambio de variables  $x \rightarrow x - y$ ,  $x' \rightarrow x + y$ ,  $l' = l - s$  encontramos

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\gamma} dk (-1)^{\sum_{j>i} s_j} k^{s_i-2} e^{\xi(k, -2y^{(i)})} \exp \left[ \left( y + e_i \left( \frac{1}{k} \right) \right) D \right] \cdot \quad (2.20)$$

$$\tau'(l - s + e_i, x) \tau(l - e_i, x) = 0$$

Podemos evaluar estas integrales calculando el residuo en  $k = \infty$  de sus integrandos. Para este fin es conveniente introducir los polinomios de Schur  $S_n(v^{(i)})$  que dependen de  $v^{(i)} = (v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)}, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$   $i = 1, \dots, N$ . Estos polinomios están definidos como los coeficientes del desarrollo:

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} k^n v_n^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n S_n(v^{(i)}). \quad (2.21)$$

Los polinomios de Schur de orden más bajo son

$$S_0(v^{(i)}) = 1, \quad S_1(v^{(i)}) = v_1^{(i)}, \quad S_2(v^{(i)}) = v_2^{(i)} + \frac{1}{2} v_1^{(i)2}$$

$$S_3(v^{(i)}) = v_3^{(i)} + v_1^{(i)} v_2^{(i)} + \frac{1}{6} v_1^{(i)3}$$

$$S_4(v^{(i)}) = \frac{1}{24} v_1^{(i)4} + \frac{1}{2} v_1^{(i)2} v_2^{(i)} + v_1^{(i)} v_3^{(i)} + \frac{1}{2} v_2^{(i)2} + v_4^{(i)}$$

Desarrollando la exponencial, de (2.21) encontramos para los polinomios de Schur la expresión general

$$S_n(v^{(i)}) = \sum_{[\alpha^{(i)}] = n} \frac{1}{\alpha^{(i)}!} v^{(i)\alpha^{(i)}}, \quad n \geq 0 \quad (2.22)$$

donde la suma está extendida a todo  $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_m^{(i)}, \dots)$  de componentes enteras positivas tales que  $[\alpha^{(i)}] = \alpha_1^{(i)} + 2\alpha_2^{(i)} + \dots + m\alpha_m^{(i)} + \dots = n$  y donde denotamos por  $\alpha^{(i)}! v^{(i)\alpha^{(i)}}$  a

$$\alpha^{(i)}! = \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{(i)}!), \quad v^{(i)\alpha^{(i)}} = \prod_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)\alpha_n^{(i)}}$$

Considerando ahora el coeficiente de  $k^{-1}$  en el desarrollo de Laurent del integrando de (2.20) vemos que (2.20) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^N (-1)^{\sum_{j>i} s_j} e^{yD} \sum_{n \geq 0} S_n(-2y^{(i)}) S_{n+s_i-1}(\tilde{D}^{(i)}) \tau'(l-s+e_i, x) \tau(l-e_i, x) = 0 \quad (2.23)$$

donde  $\tilde{D}^{(i)} = (D_1^{(i)}, \frac{1}{2}D_2^{(i)}, \dots, \frac{1}{n}D_n^{(i)}, \dots)$ . Introduciendo (2.22) en (2.23) encontramos

$$\sum_{i=1}^N (-1)^{\sum_{j>s} s_j} \sum_{\gamma} y^{\gamma} P_{\gamma, s, -1}^{(i)}(D) \tau'(l - s + e_i, x) \tau(l - e_i, x) = 0 \quad (2.24)$$

donde  $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(N)})$  y hemos definido:

$$P_{\gamma, s}^{(i)}(D) = \sum_{\alpha + \beta^{(i)} = \gamma} \frac{(-2)^{|\beta|}}{\alpha! \beta^{(i)}!} D^{\alpha} S_{[\beta^{(i)}] + s}(\tilde{D}^{(i)})$$

siendo

$$\begin{aligned} |\beta^{(i)}| &= \beta_1^{(i)} + \beta_2^{(i)} + \dots + \beta_m^{(i)} + \dots \\ D^{\alpha} &= \prod_{i=1}^N D^{(i)\alpha^{(i)}} \\ \alpha! &= \prod_{i=1}^N \alpha^{(i)}! \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que hemos asumido  $S_n \equiv 0$  si  $n < 0$ . Como la expresión es válida para todo valor de  $y$ , encontramos finalmente

$$\sum_{i=1}^N (-1)^{\sum_{j>s} s_j} P_{\gamma, s, -1}^{(i)}(D) \tau'(l - s + e_i, x) \tau(l - e_i, x) = 0. \quad (2.25)$$

Estas expresiones son equivalentes a (2.17) y constituyen la jerarquía KP con  $N$  componentes en forma de ecuaciones de Hirota.

## 2.6 Método de obtención de soluciones de la identidad bilineal

Después de haber visto como obtener ecuaciones diferenciales a partir de la identidad bilineal queremos encontrar un método para obtener soluciones a dichas ecuaciones. para ello comenzaremos por ver que existen algunas soluciones triviales de las identidades bilineales (2.17). Dado  $m \in \mathbb{Z}^N$  definimos  $\tau_m(l, x) = \delta_{lm} = \delta_{l_1 m_1} \dots \delta_{l_N m_N}$ . Entonces dados  $m, m' \in \mathbb{Z}^N$  y tales que  $m_i \geq m'_i$   $i = 1, \dots, N$  podemos ver que las funciones

$$\tau(l, x) = \tau_m(l, x), \quad \tau'(l, x) = \tau_{m'}(l, x) \quad (2.26)$$

satisfacen (2.17)

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\gamma} dk(-1)^{\sum_{j>i} l_j + l'_j} k^{l_i - l'_i - 2} e^{\xi(k, x^{(i)} - x^{(i)'})} \delta_{l_i - e_i, m} \delta_{l'_i + e_i, m'} =$$

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\gamma} dk(-1)^{\sum_{j>i} m_j + m'_j} k^{m_i - m'_i} e^{\xi(k, x^{(i)} - x^{(i)'})} \delta_{l_i - e_i, m} \delta_{l'_i + e_i, m'} = 0$$

Como demostramos al principio de este capítulo, el conjunto de soluciones de la identidad bilineal es invariante bajo la acción del grupo  $Gl(N\infty)$ . De este modo a partir de cualquier par de soluciones triviales  $(\tau_m, \tau_{m'})$   $m_i \geq m'_i$  y a partir de cualquier elemento  $g \in Gl(N\infty)$  podemos encontrar una nueva solución  $(g\tau_m, g\tau_{m'})$ . Este método de obtener soluciones de la identidad bilineal es conocido como método de revestimiento.

Utilizaremos elementos  $g \in Gl(N\infty)$  de la forma

$$g = \exp \sum_{i,j=i}^N \left\{ \oint_{\gamma \times \gamma} dk dq a^{ij}(k, q) \psi^{(i)}(k) \psi^{(j)*}(q) \right\},$$

siendo  $a^{ij}(k, q)$  distribuciones apropiadas sobre  $\gamma \times \gamma$ . En particular veremos que las soluciones solitónicas las obtenemos tomando elementos

$$g = \exp \sum_{i,j=i}^N \sum_{l=1}^{N^{(i)}} \sum_{m=1}^{N^{(j)}} a_{lm}^{ij} \psi^{(i)}(k_l^{(i)}) \psi^{(j)*}(q_m^{(j)}).$$

Para ello vamos a necesitar conocer la expresión del producto de operadores de vértice de la forma

$$\psi^{(i)}(k_1) \psi^{(i)*}(q_1) \dots \psi^{(i)}(k_r) \psi^{(i)*}(q_r) \quad (2.27)$$

$$k_i, q_i \in \gamma, \quad k_i \neq q_j, \quad i, j = 1 \dots r;$$

de acuerdo con las expresiones (2.16) basta con tener en cuenta que:

$$\psi^{(i)}(k)(-1)^{\sum_{j>i} l_j} = (-1)^{\sum_{j>i} l'_j} \psi^{(i)}(k),$$

$$\psi^{(i)*}(k)(-1)^{\sum_{j>i} l'_j} = (-1)^{\sum_{j>i} l_j} \psi^{(i)*}(k),$$

$$\psi^{(i)}(k) q^{l_i} = q^{l_i-1} \psi^{(i)}(k),$$

$$\psi^{(i)*}(k) q^{l_i} = q^{l_i+1} \psi^{(i)*}(k),$$

$$\psi^{(i)}(k) e^{\xi(k', x)} = \left(1 - \frac{k'}{k}\right) e^{\xi(k', x)} \psi^{(i)}(k),$$

$$\psi^{(i)*}(q) e^{\xi(k', x)} = \left(1 - \frac{k'}{q}\right)^{-1} e^{\xi(k', x)} \psi^{(i)*}(q), \quad k' \neq q,$$

$$\psi^{(i)}(k) e^{-\xi(q', x)} = \left(1 - \frac{q'}{k}\right)^{-1} e^{-\xi(q', x)} \psi^{(i)}(k), \quad q' \neq k,$$

$$\psi^{(i)*}(q) e^{-\xi(q', x)} = \left(1 - \frac{q'}{q}\right) e^{-\xi(q', x)} \psi^{(i)*}(q).$$

A partir de estas expresiones vemos facilmente que el producto de operadores de vértice (2.27) viene dado por

$$\prod_{j=1}^r \left\{ \left( \frac{k_j}{q_j} \right)^{l_j} \exp[\xi(k_j, z^{(i)}) - \xi(q_j, z^{(i)})] \frac{q_j}{k_j - q_j} \cdot \right. \\ \left. \prod_{m < j} \left[ \frac{(k_m - k_j)(q_m - q_j)}{(q_m - k_j)(k_m - q_j)} \right] \right\} \cdot \exp \left[ \sum_{j=1}^r \left( \epsilon \left( \frac{1}{q_j} \right) - \epsilon \left( \frac{1}{k_j} \right) \right) \vec{\nabla}^{(i)} \right]. \quad (2.28)$$

Resumiendo, hemos definido los campos fermiónicos, así como sus realizaciones en términos de operadores de vértice sobre la circunferencia  $\gamma$ . De este modo, las soluciones obtenidas mediante el método de revestimiento a las ecuaciones (2.25) dependerán de parámetros complejos sobre la circunferencia  $\gamma$ . Sin embargo, estas soluciones pueden extenderse analíticamente a todo el plano complejo siempre que se satisfaga  $k_i \neq q_j$  en (2.27).

## 2.7 Ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili y Korteweg de Vries

Después de haber visto como a partir de los operadores de vértice podemos obtener soluciones de ecuaciones diferenciales queremos ver a modo de ejemplo el caso más sencillo. Para ello tomamos en la identidad bilineal (2.17)  $N = 1$ ; así

$$\oint_{\gamma} dk k^{l-l'} z^{\ell(k, x - x')} \tau(l-1, x - \epsilon \left( \frac{1}{k} \right)) \tau'(l'+1, x' + \epsilon \left( \frac{1}{k} \right)) = 0. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones de Hirota que pueden obtenerse a partir de esta identidad bilineal las encontramos haciendo de nuevo la particularización  $N = 1$  en (2.25), en este caso las ecuaciones se reducen a

$$P_{\gamma, l-l'-1}(D) \tau'(l'+1, x) \cdot \tau(l-1, x) = 0. \quad (2.30)$$

Haciendo ahora  $l' = l - 2$ , redefiniendo la variable discreta  $l: l-1 \rightarrow l$  y tomando  $\tau' = \tau$  (2.30) queda de la forma

$$P_{\gamma, 1}(D) \tau(l, x) \cdot \tau(l, x) = 0. \quad (2.31)$$

Si tomamos en (2.31)  $\gamma = (1, 1, 0, 0, \dots)$  y tenemos en cuenta la primera de las ecuaciones (2.19), encontramos:

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau(l, x) \cdot \tau(l, x) = 0,$$

como esta ecuación no contiene derivadas respecto de  $x_n$  para  $n \geq 4$  podemos tomar a partir de ahora  $x_n = 0$   $n \geq 4$ , si además introducimos el cambio de variables

$$x_1 = x, \quad x_2 = \sqrt{3}y, \quad x_3 = -4t \quad (2.32)$$

la ecuación se transforma en

$$(D_x^4 + D_y^2 + D_x D_t) \tau \cdot \tau = 0, \quad (2.33)$$

definiendo ahora la función:

$$u = 2\partial_x^2 \log \tau$$

vemos que (2.33) es la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili KP

$$(u_t + 6uu_x + u_{xx})_x + u_{yy} = 0. \quad (2.34)$$

De lo visto en la sección 2.6 para obtener soluciones de esta ecuación basta con actuar con elementos  $g \in Gl(\infty)$  sobre la solución trivial  $\tau_0(l, x) = \delta_{l0}$ . Empezamos por tomar para  $g$  el caso más sencillo, es decir

$$g = \exp\{\alpha\psi(p)\psi^*(q)\}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

siendo  $p, q \in \gamma$  y  $p \neq q$ . Desarrollando la exponencial y recordando las reglas de anticomutación, encontramos que los únicos términos no nulos vienen dados por

$$g = 1 + \alpha\psi(p)\psi^*(q)$$

y de acuerdo con (2.7)  $\tau(l, x) = g\tau_0(l, x)$  viene dado por

$$\tau(l, x) = \left\{ 1 + \frac{\alpha q}{p - q} e^{\xi(p, x) - \xi(q, x)} \right\} \delta_{l0}.$$

Evaluando ahora la función  $\tau(l, x)$  en  $l = 0$  y realizando el cambio de variables (2.32) encontramos

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2}(p - q)^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\eta(x, y, t)}{2} \right] \\ \eta(x, y, t) &= (p - q)x + \sqrt{3}(p^2 - q^2)y - 4(p^3 - q^3)t + \log \frac{\alpha q}{p - q}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

La solución (2.35) representa un solitón unidimensional que se desplaza sin deformarse. Podemos generalizar este resultado tomando el elemento del grupo  $Gl(\infty)$

$$g = \exp \sum_{i=1}^N \{a_i \psi(p_i) \psi^*(q_i)\} \quad p_i, q_i \in \gamma \quad p_i \neq q_j, \quad i, j = 1, \dots, N$$

de nuevo para hacer actuar  $g$  sobre la solución trivial empezamos por desarrollar la exponencial obteniendo

$$g = \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1} \dots a_{i_r} \psi(p_{i_1}) \psi^*(q_{i_1}) \dots \psi(p_{i_r}) \psi^*(q_{i_r}),$$

teniendo ahora en cuenta (2.28) que nos da la expresión del producto de operadores de vértice, es inmediato ver que

$$\tau(l, x) = \left\{ \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} \prod_{k=1}^r \left[ \exp\{\xi(p_{i_k}, x) - \xi(q_{i_k}, x)\} \frac{a_{i_k} q_{i_k}}{p_{i_k} - q_{i_k}} \cdot \prod_{i_j < i_k} \frac{(p_{i_j} - p_{i_k})(q_{i_j} - q_{i_k})}{(q_{i_j} - p_{i_k})(p_{i_j} - q_{i_k})} \right] \right\} \delta_{l0}$$

evaluando de nuevo  $\tau(l, x)$  en  $l = 0$ , teniendo en cuenta (2.32) y denotando  $\tau(x, y, t) = \tau(0, x)$  encontramos

$$\tau(x, y, t) = \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} \prod_{k=1}^r \left\{ \prod_{i_j < i_k} \frac{(p_{i_j} - p_{i_k})(q_{i_j} - q_{i_k})}{(q_{i_j} - p_{i_k})(p_{i_j} - q_{i_k})} e^{\eta_{i_k}(x, y, t)} \right\} \\ \eta_i(x, y, t) = (p_i - q_i)x + \sqrt{3}(p_i^2 - q_i^2)y - 4(p_i^3 - q_i^3)t + \log \left( \frac{a_i q_i}{p_i - q_i} \right) \quad (2.36)$$

solución que representa  $N$  solitones unidimensionales que interaccionan sin sufrir deformación [38].

Después de haber visto como aparece la ecuación KP en el formalismo bilineal queremos ver como en dicho formalismo podemos encontrar la ecuación de Korteweg-de Vries KdV como una reducción de la ecuación de KP [16], [26], [32]. Para ello vamos a considerar los elementos  $g \in Gl(\infty)$  que son invariantes bajo el operador  $T^2$ , es decir  $T^2 g T^{-2} = g$ . Para ver la forma de las realizaciones de estos elementos calculamos la transformación de  $\psi(p)\psi^*(q)$  bajo  $T^2$ , de acuerdo con (2.7) es fácil ver que

$$T^2 \psi(p) \psi^*(q) T^{-2} = \left( \frac{p}{q} \right)^2 \psi(p) \psi^*(q) \quad p, q \in \gamma, \quad p \neq q$$

entonces un elemento  $g \in Gl(\infty)$  de la forma

$$g = \exp \left( \oint_{\gamma \times \gamma} dp dq a(p, q) \psi(p) \psi^*(q) \right)$$

se transforma bajo  $T^2$  como

$$T^2 g T^{-2} = \exp \left( \oint_{\gamma \times \gamma} dp dq a(p, q) \left( \frac{p}{q} \right)^2 \psi(p) \psi^*(q) \right)$$

de donde se sigue que los siguientes elementos son invariantes bajo  $T^2$

$$g = \exp \left( \oint_{\gamma} dp c(p) \psi(p) \psi^*(-p) \right). \quad (2.37)$$

Pero de acuerdo con (2.7)  $\psi(p) \psi^*(-p)$  viene dado por

$$\psi(p) \psi^*(-p) = \frac{1}{2} (-1)^{l+1} e^{\xi(p, x) - \xi(-p, x)} e^{-\left(\epsilon\left(\frac{1}{p}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{-p}\right)\right) \hat{\sigma}}$$

donde

$$\xi(p, x) - \xi(-p, x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} p^{2n+1} x_{2n+1}$$

y las componentes del vector  $\epsilon\left(\frac{1}{p}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{-p}\right)$

$$\begin{aligned} \left( \epsilon\left(\frac{1}{p}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{-p}\right) \right)_{2n} &= 0, \\ \left( \epsilon\left(\frac{1}{p}\right) - \epsilon\left(\frac{1}{-p}\right) \right)_{2n-1} &= \frac{2}{(2n-1)p^{2n-1}}, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

es decir que las realizaciones de los elementos de  $Gl(\infty)$  que nos vienen dadas por (2.37) no dependen de las variables  $x_{2n}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ . Las funciones  $\tau$  obtenidas a partir de la solución trivial (2.26) son entonces independientes de las variables  $x_{2n}$ .

La jerarquía de ecuaciones diferenciales obtenidas aplicando la reducción

$$\frac{\partial}{\partial x_{2n}} \tau(t, x) = 0$$

a la jerarquía (2.31) es conocida como la jerarquía KdV. El primer miembro de esta jerarquía es la ecuación KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.38)$$

Podemos obtener una solución a esta ecuación haciendo  $q = -p$  en (2.35), encontramos entonces

$$u(x, t) = 2p^2 \operatorname{sech}^2[p x - 4p^3 t + \frac{1}{2} \log \left( \frac{-a}{2} \right)], \quad (2.39)$$



esta solución es un solitón en (1+1) dimensiones. Podemos también obtener la solución con  $N$  solitones [48], haciendo  $q_{i_k} = -p_{i_k}$  en (2.36), en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \tau(x, t) &\approx \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} \prod_{k=1}^r \left\{ \prod_{i_j < i_k} \left[ \frac{p_{i_j} - p_{i_k}}{p_{i_j} + p_{i_k}} \right]^2 e^{2p_{i_k} x - 8p_{i_k}^3 t + \log \frac{-a_{i_k}}{2}} \right\} \\ u(x, t) &\approx 2\delta_x^2 \log \tau(x, t). \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos aplicado el método de revestimiento únicamente partiendo de la solución trivial (2.26) pero podemos partir igualmente de otras soluciones triviales. Consideremos de nuevo la jerarquía KP en una componente, queremos llegar a otras soluciones de KdV partiendo de nuevas soluciones triviales para lo que empezaremos por comprobar que la función:

$$\tau_0(l, x) = e_a(x) \delta_{l0} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n a^n x_n^2 \right] \delta_{l0} \quad (2.40)$$

es solución de la jerarquía de KP en una componente. Para ello tenemos en cuenta que

$$e_a(x \pm \epsilon \left( \frac{1}{k} \right)) = e_a(x) \left( 1 - \frac{a}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\mp \ell(\frac{1}{k}, x)}$$

luego introduciendo (2.40) en (2.29) tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} dk k^{l-l'} - 2 e^{\ell(k, x-x')} \tau_0(l-1, x - \epsilon \left( \frac{1}{k} \right)) \tau_0(l'+1, x' + \epsilon \left( \frac{1}{k} \right)) = \\ \delta_{l-1,0} \delta_{l'+1,0} e_a(x) e_a(x') \oint_{\gamma} dk e^{\ell(k, x-x') + \ell(\frac{1}{k}, x-x')} \left( 1 - \frac{a}{k^2} \right), \end{aligned}$$

pero evaluando ahora la integral como el residuo en el origen tenemos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} dk e^{\ell(k, x-x') + \ell(\frac{1}{k}, x-x')} \left( 1 - \frac{a}{k^2} \right) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{ S_n(x-x') S_{n+1}(x-x') a^{n+1} - a S_{n+1}(x-x') S_n(x-x') a^n \} = 0 \end{aligned}$$

con lo que comprobamos que  $\tau_0(l, x)$  es solución de (2.29). Definimos ahora la función  $\sigma(l, x)$  mediante:

$$\tau(l, x) = e_a(x) \sigma(l, x) \quad (2.41)$$

de este modo, en términos de  $\sigma(l, x)$ , la identidad bilineal (2.29) se transforma en:

$$\oint_{\gamma} dk \{k^{l-l'-2} e^{\xi(k, x-x')} + \xi(\frac{1}{k}, x-x') (1 - \frac{a}{k^2}) \cdot \sigma(l-1, x - \epsilon(\frac{1}{k})) \sigma(l'+1, x' + \epsilon(\frac{1}{k}))\} = 0$$

tomando  $l = -l' = 1$ , definiendo  $\sigma(x) = \sigma(0, x)$ , realizando el cambio de variables  $x \rightarrow x - y$ ,  $x' \rightarrow x + y$  y recordando (2.19) y (2.21) tenemos que:

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} S_n(-2y) S_m(-2y) a^m e^{yD} [S_{n-m+1}(\tilde{D}) - a S_{n-m-1}(\tilde{D})] \sigma \cdot \sigma = 0$$

e introduciendo (2.22) llegamos finalmente a las ecuaciones de Hirota

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=\mu} \frac{(-2)^{|\alpha|+|\beta|} a^{|\beta|}}{\alpha! \beta! \gamma!} D^{\gamma} [S_{[\alpha]-[\beta]+1}(\tilde{D}) - a S_{[\alpha]-[\beta]-1}(\tilde{D})] \sigma \cdot \sigma = 0 \quad (2.42)$$

Para encontrar KdV entre las ecuaciones (2.42) tomamos  $\mu = (0, 0, 1, 0, \dots)$  y suponiendo que  $\sigma(x)$  no depende de las variables  $x_{2n}$  llegamos a:

$$(D_1^4 - 4D_1 D_3 - 12a D_1^2) \sigma \cdot \sigma = 0$$

que bajo el cambio de variables (2.32) se transforma en:

$$(D_x^4 + D_x D_t - 12a D_x^2) \sigma \cdot \sigma = 0. \quad (2.43)$$

Si definimos ahora la función  $u(x, t)$  como

$$u(x, t) = -2a + 2\partial_x^2 \log \sigma(x, t)$$

donde hemos tomado  $x_{2n+1} = 0$  si  $n > 1$ , entonces es inmediato comprobar que (2.43) se convierte en la ecuación KdV.

Para encontrar soluciones necesitamos ver que elementos de  $Gl(\infty)$  al actuar sobre (2.40) dan lugar a funciones  $\sigma(l, x)$  independientes de  $x_{2n}$ . Si consideramos como anteriormente el producto  $\psi(p)\psi^*(-p)$  vemos que al actuar sobre (2.40) obtenemos

$$\psi(p)\psi^*(-p)\tau_0(l, x) = e_a(x) \frac{(-1)^{l+1}}{2} \frac{p^2 - a}{p^2 + a} \exp \left[ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( p^{2n+1} + \frac{a^{2n+1}}{p^{2n+1}} \right) x_{2n+1} \right]$$

luego de nuevo los elementos de la forma (2.37) nos llevan a soluciones de KdV. Partiendo del caso más sencillo  $g = \exp(c\psi(p)\psi^*(-p))$  y de la solución trivial (2.40), obtenemos entonces para  $\sigma(x, t)$

$$\sigma(x, t) = 1 - \frac{c}{2} \frac{p^2 - a}{p^2 + a} \exp \left\{ 2 \left( p + \frac{a}{p} \right) x - 8 \left( p^3 + \frac{a^3}{p^3} \right) t \right\}$$

de donde  $u(x, t)$  tiene la forma:

$$u(x, t) = -2a + 2 \left( p + \frac{a}{p} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \eta_a(x, t) \quad (2.44)$$

siendo

$$\eta_a(x, t) = \left( p + \frac{a}{p} \right) x - 4 \left( p^3 + \frac{a^3}{p^3} \right) t + \frac{1}{2} \log \left[ \frac{c}{2} \frac{a - p^2}{a + p^2} \right],$$

veamos entonces que (2.44) es de nuevo un solitón que tiene diferente relación de dispersión que (2.39) y que se reduce a (2.39) en el caso  $a = 0$ . Podemos también tomar para  $g$

$$g = \exp \sum_{i=1}^N \{ c_i \psi(p_i) \psi^*(-p_i) \},$$

desarrollando la exponencial tenemos que

$$g = \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} c_{i_1} \dots c_{i_r} \psi(p_{i_1}) \psi^*(-p_{i_1}) \dots \psi(p_{i_r}) \psi^*(-p_{i_r})$$

e introduciendo (2.28) encontramos

$$g = \sum_{r=0}^N \sum_{i_1 < \dots < i_r} c_{i_1} \dots c_{i_r} \prod_{j=1}^r \left\{ (-1)^j e^{2 \sum_{n=0}^{\infty} p_{i_j}^{2n+1} x_{2n+1}} \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \prod_{i < j} \left( \frac{p_{i_1} - p_{i_j}}{p_{i_1} + p_{i_j}} \right)^2 e^{\left( \epsilon \left( \frac{1}{-p_{i_j}} \right) - \epsilon \left( \frac{1}{p_{i_j}} \right) \right) \Phi} \right\},$$

teniendo en cuenta que

$$e_a \left( x + \sum_{j=1}^r \left\{ \epsilon \left( \frac{1}{-p_{i_j}} \right) - \epsilon \left( \frac{1}{p_{i_j}} \right) \right\} \right) = \\ e_a(x) \prod_{j,l} \frac{p_{i_l} p_{i_j} - a}{p_{i_l} p_{i_j} + a} e^{2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j,l} \left( \frac{a}{p_{i_j}} \right)^{2n+1} x_{2n+1}},$$

obtenemos para  $\sigma(x, t)$

$$\sigma(x, t) = \sum_I \left\{ C(I) \prod_{j \in I} \exp \left[ 2 \left( p_j + \frac{a}{p_j} \right) x - 8 \left( p_j^3 + \frac{a^3}{p_j^3} \right) t \right] \right\}$$

donde la suma está extendida a todos los subconjuntos de índices  $I \subset \{1, \dots, N\}$  y  $C(I)$  está definido por

$$C(I) = \prod_{j \in I} \left\{ \left( -\frac{c_j}{2} \right) \prod_{i \in I} \left( \frac{p_i p_j - a}{p_i p_j + a} \right) \prod_{i < j} \left( \frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \right)^2 \right\}$$

Vemos entonces que la función define  $N$  solitones que se desplazan con velocidades  $v_j = 4(p_j^2 - a + \frac{a^2}{p_j^2})$  y que no sufren cambio de forma bajo interacción.



## Capítulo 3

# Sistema Boussinesq

### 3.1 Sistema Boussinesq como reducción de la jerarquía de KP en dos componentes

En este capítulo vamos a estudiar el sistema Boussinesq dentro del contexto de las identidades bilineales. Este modelo es el miembro más sencillo no trivial de la jerarquía de Jaulent-Miodek [31], jerarquía de sistemas integrables asociada al operador de Schrödinger con el potencial dependiendo de la energía en su forma más sencilla [39] [40]. Puede verse utilizando el concepto de módulo asintótico [28] que la jerarquía de Jaulent-Miodek es una reducción de la jerarquía de KP en dos componentes [30]. De lo visto hasta ahora sabemos que si encontramos el sistema Boussinesq como una reducción de la jerarquía de KP en dos componentes tenemos un método para obtener soluciones.

Consideremos entonces la jerarquía de KP en dos componentes obtenida de hacer  $N = 2$  en (2.17) y tomemos  $s = l - l' = e_1 + e_2$ ,  $\tau' = \tau$ . La ecuación que obtenemos entonces es:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \left\{ e^{\xi(k, x^{(1)} - x^{(1)'})} \tau(l - e_1, x - e_1 \left(\frac{1}{k}\right)) \tau(l - e_2, x' + e_1 \left(\frac{1}{k}\right)) - \right. \\ \left. e^{\xi(k, x^{(2)} - x^{(2)'})} \tau(l - e_2, x - e_2 \left(\frac{1}{k}\right)) \tau(l - e_1, x' + e_2 \left(\frac{1}{k}\right)) \right\} = 0, \quad (3.1)$$

donde podemos ver que para la elección de  $s$  que hemos realizado sólo aparecen dos funciones  $\tau$  diferentes en la identidad bilineal. Tomamos  $l = e_1$  y para simplificar la notación definimos

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \tau(0, x) \\ \tau_2(x) &= \tau(e_1 - e_2, x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

de este modo, la ecuación (3.1) queda como:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \{ e^{\ell(k, x^{(1)} - x^{(1)'})} \tau_1(x - \epsilon_1(\frac{1}{k})) \tau_2(x' + \epsilon_1(\frac{1}{k})) - e^{\ell(k, x^{(2)} - x^{(2)'})} \tau_2(x - \epsilon_2(\frac{1}{k})) \tau_1(x' + \epsilon_2(\frac{1}{k})) \} = 0, \quad (3.3)$$

El objeto de esta sección es demostrar que el sistema Boussinesq aparece como una reducción de (3.3). Para ello introducimos los operadores

$$c_1 = T_1, \quad c_2 = (-1)^{T_2} \quad (3.4)$$

Podemos obtener fácilmente la acción de estos operadores sobre los operadores de vértice  $\psi^{(i)}(k)$ ,  $\psi^{(i)*}(k)$   $i = 1, 2$  de las expresiones (2.16). Encontramos que para dichos operadores

$$\begin{aligned} c_i \psi^{(i)}(k) c_i^{-1} &= k \psi^{(i)}(k) & c_i \psi^{(i)*}(k) c_i^{-1} &= k^{-1} \psi^{(i)*}(k) \\ c_i \psi^{(j)}(k) c_i^{-1} &= \psi^{(j)}(k) & c_i \psi^{(j)*}(k) c_i^{-1} &= \psi^{(j)*}(k) \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Estamos interesados en los elementos  $g$  del grupo  $Gl(2\infty)$  que satisfacen

$$c_1 c_2 g c_2^{-1} c_1^{-1} = g. \quad (3.6)$$

Para ver la forma de las realizaciones en términos de operadores de vértice de estos elementos, calculamos la transformación de  $\psi^{(i)}(q) \psi^{(j)*}(k)$  bajo  $c_1 c_2$ . Teniendo en cuenta (3.5) es inmediato que:

$$c_1 c_2 \psi^{(i)}(q) \psi^{(j)*}(k) c_2^{-1} c_1^{-1} = \frac{q}{k} \psi^{(i)}(q) \psi^{(j)*}(k)$$

luego para que el producto  $\psi^{(i)}(q) \psi^{(j)*}(k)$  sea invariante bajo  $c_1 c_2$  es necesario que  $k = q$ . De este modo llegamos a que los elementos  $g$  admisibles que satisfacen (3.6) deben ser de la forma:

$$g = \exp \left( \oint_{\gamma} dq [a(q) \psi^{(1)}(q) \psi^{(2)*}(q) + b(q) \psi^{(2)}(q) \psi^{(1)*}(q)] \right). \quad (3.7)$$

Pero de (2.16) tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(q) \psi^{(2)*}(q) &= (-1)^{l_2} q^{l_1 - l_2 - 1} e^{\ell(q, x^{(1)} - x^{(2)})} e^{-\ell(\frac{1}{q}) [\vec{\Phi}^{(1)} - \vec{\Phi}^{(2)}]} T_1^{-1} T_2, \\ \psi^{(2)}(q) \psi^{(1)*}(q) &= (-1)^{l_2 - 1} q^{-l_1 + l_2 - 1} e^{-\ell(q, x^{(1)} - x^{(2)})} e^{\ell(\frac{1}{q}) [\vec{\Phi}^{(1)} - \vec{\Phi}^{(2)}]} T_1 T_2^{-1}, \end{aligned}$$

es decir, los productos  $\psi^{(1)}(q) \psi^{(2)*}(q)$ ,  $\psi^{(2)}(q) \psi^{(1)*}(q)$  sólo dependen de las variables  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  mediante la combinación lineal  $x^{(1)} - x^{(2)}$ . Si realizamos ahora el cambio de variables:

$$x_n = \frac{1}{2}(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}); \quad y_n = \frac{1}{2}(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) \quad (3.8)$$

encontramos que los elementos  $g$  de  $Gl(2\infty)$  de la forma (3.7) son independientes de las variables  $y_n$ , luego las soluciones generadas por la aplicación de dichos elementos a la solución trivial (2.26) son igualmente independientes de las variables  $y_n$ .

Queremos ahora encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ) que no dependen de las variables  $y_n$ , ya que de lo visto hasta ahora sabemos que podremos encontrar soluciones mediante la aplicación de elementos de  $Gl(2\infty)$  de la forma (3.7) sobre la solución trivial (2.26). Con este fin definimos la variable  $z = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)}) - \frac{1}{2}(x^{(1)'} + x^{(2)'})$  y la identidad bilineal (3.3) para funciones  $\tau_i$  que no dependen de  $y$  queda de la forma:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} e^{\xi(k, z)} \left\{ e^{\xi(k, x-x')} \tau_1 \left( x - \frac{1}{2}\epsilon \left( \frac{1}{k} \right) \right) \tau_2 \left( x' + \frac{1}{2}\epsilon \left( \frac{1}{k} \right) \right) - e^{-\xi(k, x-x')} \tau_2 \left( x + \frac{1}{2}\epsilon \left( \frac{1}{k} \right) \right) \tau_1 \left( x' - \frac{1}{2}\epsilon \left( \frac{1}{k} \right) \right) \right\} = 0. \quad (3.9)$$

Introduciendo ahora el cambio de variables  $x \rightarrow x-y$ ,  $x' \rightarrow x+y$  y teniendo en cuenta las propiedades de los operadores diferenciales de Hirota llegamos a:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} e^{\xi(k, z)} \left\{ e^{\xi(k, -2y)} e^{(y + \frac{1}{2}\epsilon(\frac{1}{k}))D} \tau_2 \tau_1 - e^{\xi(k, 2y)} e^{(y - \frac{1}{2}\epsilon(\frac{1}{k}))D} \tau_1 \tau_2 \right\} = 0$$

igualando esta integral al residuo en el infinito y recordando la definición (2.21) para los polinomios de Schur tenemos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ S_m(-2y) e^{-yD} - S_m(2y) e^{yD} \} S_{m+n}(-\frac{1}{2}\bar{D}) \tau_1 \tau_2 = 0.$$

Finalmente aplicando la expresión (2.22) para los polinomios de Schur y teniendo en cuenta que la última igualdad es válida para todo valor de  $y$  obtenemos:

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} [(-1)^{|\beta|} - (-1)^{|\alpha|}] \frac{(-2)^{|\alpha|} D^{\beta}}{\alpha! \beta!} S_{|\alpha|+n}(-\frac{1}{2}\bar{D}) \tau_1 \tau_2 = 0 \quad (3.10)$$

que es la jerarquía de ecuaciones diferenciales obtenidas de la identidad bilineal (3.9) como una reducción de la jerarquía KP en dos componentes.

El sistema Boussinesq puede obtenerse tomando en (3.10)  $n = 1$ ,  $\gamma = (1, 0, 0, \dots)$ ;  $n = 2$ ,  $\gamma = (1, 0, 0, \dots)$  y  $n = 0$ ,  $\gamma = (0, 0, 1, 0, \dots)$ ; encontramos entonces:

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^2) \tau_1 \tau_2 &= 0, \\ D_x (D_t + D_x^2) \tau_1 \tau_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$



siendo  $x = x_1$ ,  $t = \frac{x_2}{2}$ ; definiendo ahora las funciones  $u$  y  $w$  como:

$$u = 2\delta_x \log \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad w = 2\delta_x^2 \log \tau_1 \tau_2 \quad (3.12)$$

de (3.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + w_x &= 0, \\ w_t + u_{xxx} + (uw)_x &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que es el sistema Boussinesq, que de acuerdo con lo visto en el capítulo 1 describe la propagación de ondas en un canal unidimensional poco profundo en el que la tensión superficial es despreciable, siendo  $u$  la velocidad en cada punto y  $w$  la altura de la interfase. Las ecuaciones (3.11) determinan entonces la forma del sistema Boussinesq en función de los operadores de Hirota [46].

## 3.2 Obtención de soluciones solitónicas mediante el formalismo bilineal

### 3.2.1 Soluciones solitónicas básicas

Una vez que hemos encontrado el sistema Boussinesq dentro de la jerarquía KP en dos componentes vamos a proceder a buscar soluciones a dicho sistema mediante el método de revestimiento. Con este fin partimos de la solución trivial

$$\tau_0(t, x) = \delta_{t0} = \delta_{t10} \delta_{t20}. \quad (3.14)$$

En la sección anterior vimos la forma general (3.7) de los elementos de  $Gl(2\infty)$  que aplicados a la solución trivial (3.14) nos dan soluciones de (3.11); para buscar soluciones con carácter localizado nos restringiremos a los elementos de la forma

$$g = \exp \left\{ \sum_{r=1}^{M_1} a_r \psi^{(1)}(p_r) \psi^{(2)*}(p_r) + \sum_{s=1}^{M_2} b_s \psi^{(2)}(q_s) \psi^{(1)*}(q_s) \right\} \quad (3.15)$$

donde  $a_r$ ,  $b_s$ ,  $p_r$ ,  $q_s$  ( $r = 1, \dots, M_1$ ;  $s = 1, \dots, M_2$ ) son parámetros reales tales que  $\{p_r\}_1^{M_1} \cap \{q_s\}_1^{M_2} = \emptyset$ . En particular, el elemento más sencillo de la forma (3.15) que al actuar sobre (3.14) da funciones  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  no triviales es:

$$g = \exp \{ a \psi^{(1)}(p) \psi^{(2)*}(p) + b \psi^{(2)}(q) \psi^{(1)*}(q) \}; \quad a, b, p, q \in \mathbb{R}.$$

Desarrollando la exponencial tenemos que:

$$g = 1 + a\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p) + b\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q) + ab\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q)$$

luego de (3.2) las funciones  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  vienen dadas por:

$$\tau_1 = [1 + ab\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q)]\delta_{t_0}|_{t_1=t_2=0}$$

$$\tau_2 = a\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)\delta_{t_0}|_{t_1=1, t_2=-1}$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables

$$x = \frac{x_1^{(1)} - x_1^{(2)}}{2}, \quad t = \frac{x_2^{(1)} - x_2^{(2)}}{4} \quad (3.16)$$

y que como (3.11) sólo contiene derivadas respecto  $x$  y  $t$  podemos tomar

$$x_n^{(1)} - x_n^{(2)} = 0, \quad n \geq 3 \quad (3.17)$$

encontramos finalmente

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 + \frac{abpq}{(p-q)^2} e^{2(p-q)x + 4(p^2-q^2)t}, \\ \tau_2 &= -ape^{2px + 4p^2t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

luego de (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned} u &= \frac{2k^2 \operatorname{sh} \eta + w \operatorname{ch} \eta}{k \operatorname{ch} \eta} \\ w &= 2k^2 \operatorname{sech}^2 \eta \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\eta = kx - \omega t + \gamma_0$$

y

$$k = p - q, \quad \omega = -2(p^2 - q^2), \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} \log \frac{abpq}{(p-q)^2}.$$

La solución (3.19) representa una onda que se desplaza a velocidad  $v = \frac{p}{k}$  y cuya amplitud  $w$  está localizada. En la figura 3.1 representamos dicha solución para la elección de parámetros  $p = 3$ ,  $q = 1$ ,  $a = 2$  y  $b = \frac{2}{3}$ .

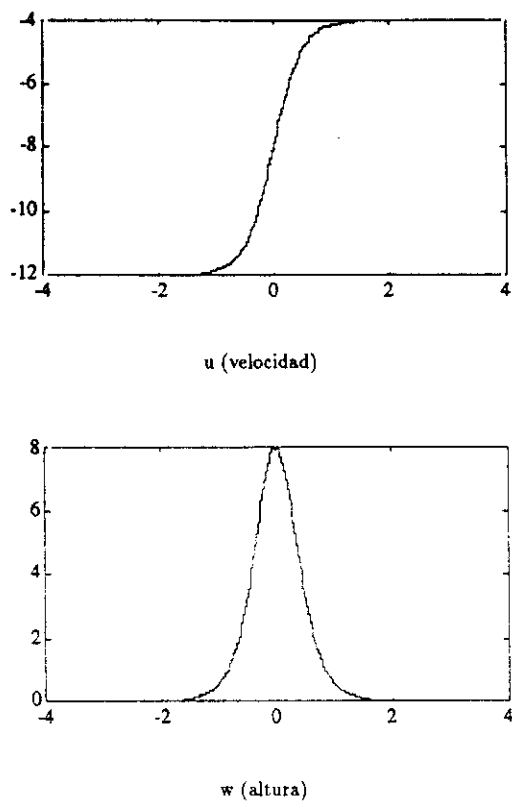


Figura 3.1

En las soluciones solitónicas de la ecuación de KdV encontramos los mismos solitones en los límites asintóticos  $t \rightarrow \pm\infty$ , sin embargo vamos a ver como en el caso del sistema Boussinesq podemos encontrar solitones

diferentes en ambos límites asintóticos. Con este fin tomamos el elemento de  $Gl(2\infty)$  dado por:

$$g = \exp\{a\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p) + \sum_{s=1}^M b_s \psi^{(2)}(q_s)\psi^{(1)*}(q_s)\} \quad (3.20)$$

$$a, b_s, p, q_s \in \mathbb{R}; \quad s = 1, \dots, M;$$

definiendo ahora los operadores  $A$  y  $B_s$ ,  $s = 1, \dots, M$  como:

$$A = a\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p); \quad B_s = b_s \psi^{(2)}(q_s)\psi^{(1)*}(q_s)$$

tenemos que la exponencial en (3.20) puede desarrollarse, obteniendo para  $g$ :

$$g = (1 + A) \left( \sum_I \prod_{s \in I} B_s \right)$$

estando la suma extendida a todos los posibles subconjuntos  $I \subset \{1, \dots, M\}$ . En términos de los operadores  $A$  y  $B_s$  las funciones  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (1 + \sum_{s=1}^M AB_s) \delta_{l_0} |_{l_1=l_2=0}, \\ \tau_2 &= A \delta_{l_0} |_{l_1=1, l_2=-1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

de donde vemos que  $\tau_2$  sigue siendo la función dada por (3.18), luego no contribuye a  $w$ , mientras que  $\tau_1$  en este caso tiene la forma:

$$\tau_1(x, t) = 1 + \sum_{s=1}^M \frac{ab_s p q_s}{(p - q_s)^2} e^{2k_s(x - v_s t)} \quad (3.22)$$

donde

$$k_s = p - q_s, \quad v_s = -2(p + q_s) \quad s = 1, \dots, M. \quad (3.23)$$

Para poder realizar un análisis asintótico tomamos ahora  $q_1 < q_2 < \dots < q_M < p$ ; es decir  $k_1 > k_2 > \dots > k_M > 0$ ,  $v_1 > v_2 > \dots > v_M$  y evaluamos la función  $\tau_1$  sobre el rayo  $x(t) = x + ct$ , tenemos entonces:

$$\tau_1(x(t), t) = 1 + \sum_{s=1}^M \frac{ab_s p q_s}{(p - q_s)^2} e^{2k_s x} \cdot e^{2\theta_s(c)t}, \quad (3.24)$$

siendo

$$\theta_s(c) = k_s(c - v_s) = k_s(c - 2k_s + 4p). \quad (3.25)$$

Queremos ahora considerar el comportamiento de  $w$  en los límites asintóticos  $t \rightarrow \pm\infty$ . De (3.21) y (3.12) tenemos que  $w = 2\partial_x^2 \log \tau_1$  luego para que

en el límite  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) exista contribución a  $w$  que se desplace a una velocidad  $c$  es necesario que para dicho límite el término dominante en (3.24) contenga más de un sumando; es decir sólo podrá haber contribuciones a  $w$  que se desplacen a las velocidades  $v_r$ , definidas en (3.23) o a las velocidades  $c_{rs}$  que verifiquen  $\theta_s(c_{rs}) = \theta_r(c_{rs})$ ;  $r > s$ . De (3.25) es inmediato comprobar que estas últimas vienen dadas por:

$$c_{rs} = 2(k_s + k_r) - 4p, \quad (3.26)$$

además como  $\theta_i(c_{rs}) = 2k_r k_s$ , es siempre positivo, estas velocidades no darán contribución en el límite  $t \rightarrow -\infty$ . En dicho límite, sólo habrá contribuciones que se desplacen a las velocidades  $v_r$  que verifiquen  $\theta_l(v_r) > 0$  si  $l \neq r$ , es decir sólo existe una estructura que se desplaza a velocidad  $v_1$ . De (3.24) tenemos que:

$$\tau_1(x + v_1 t, t) \sim 1 + \frac{ab_1 p q_1}{(p - q_1)^2} e^{2k_1 x}, \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty, \quad (3.27)$$

luego la forma de esta estructura es la del solitón (3.19). Por otra parte en el límite  $t \rightarrow \infty$  encontraremos contribuciones que se desplacen a velocidades  $v_r$  y  $c_{rs}$  que verifiquen:

$$\theta_l(v_r) < 0 \quad \forall l \neq r, \quad (3.28a)$$

$$\theta_r(c_{rs}) > \theta_l(c_{rs}) \quad \forall l \neq r, s. \quad (3.28b)$$

La condición (3.28a) sólo la satisface la velocidad  $v_M$  para la que tenemos:

$$\tau_1(x + v_M t, t) \sim 1 + \frac{abM p q_M}{(p - q_M)^2} e^{2k_M x}, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Para analizar la condición (3.28b) consideramos la diferencia  $\theta_r(c_{rs}) - \theta_l(c_{rs})$  que de (3.25) y (3.26) puede escribirse como:

$$\theta_r(c_{rs}) - \theta_l(c_{rs}) = 2(k_r - k_l)(k_s - k_l) \quad (3.30)$$

luego la expresión (3.30) es positiva si  $l > r$  ó  $l < s$  y negativa si  $s < l < r$ , de donde vemos que (3.28b) se verifica sólo si  $r = s + 1$ ,  $s = 1, \dots, M - 1$ . Tenemos entonces que en límite  $t \rightarrow \infty$  existen contribuciones que se desplazan a las velocidades  $c_{s+1,s}$  dadas por (3.26) para las que la función  $\tau_1$  se comporta como:

$$\tau_1(x + c_{s+1,s} t, t) \sim \frac{ab_{s+1} p q_{s+1}}{(p - q_{s+1})^2} e^{2k_{s+1} x} \left\{ 1 + \frac{b_s q_s (p - q_{s+1})^2}{b_{s+1} q_{s+1} (p - q_s)^2} e^{2(k_s - k_{s+1}) x} \right\} \\ \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad s = 1, \dots, M - 1. \quad (3.31)$$

Finalmente de (3.27), (3.29) y (3.31) vemos que la solución generada por (3.20) describe un proceso de fisión de un solitón (3.19) en  $M$  solitones.

Para ilustrar este proceso consideramos el caso  $M = 2$ . De (3.22) tenemos que:

$$\tau_1 = 1 + \frac{\overline{ab_1pq_1}}{(p-q_1)^2} e^{2k_1(x-v_1t)} + \frac{\overline{ab_2pq_2}}{(p-q_2)^2} e^{2k_2(x-v_2t)}$$

$$k_1 > k_2 > 0, \quad v_1 > v_2.$$

En el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ , la solución  $w$  se anula sobre todos los rayos de la forma  $x(t) = x + ct$ , excepto para  $c = v_1$  en el que los términos dominantes para  $\tau_1$  vienen dados por:

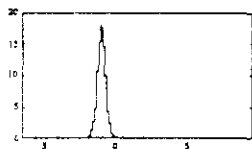
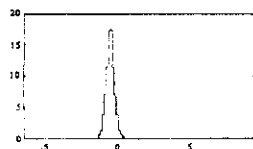
$$\tau_1(x + v_1t, t) \sim 1 + \frac{\overline{ab_1pq_1}}{(p-q_1)^2} e^{2k_1x} \text{ cuando } t \rightarrow -\infty.$$

Sin embargo, existen dos velocidades dadas por  $v_2$  y  $c_{21} = 2(k_1 + k_2) - 4p$  para las que la solución  $w$  no se anula sobre los rayos  $x(t) = x + ct$  en el límite asintótico  $t \rightarrow +\infty$ . En este caso

$$\tau_1 \sim 1 + \frac{\overline{ab_2pq_2}}{(p-q_2)^2} e^{2k_2x} \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

$$\tau_1 \sim 1 + \frac{\overline{b_1q_1(p-q_2)^2}}{b_2q_2(p-q_1)^2} e^{2(k_1-k_2)x} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

y la solución representa un proceso de fisión de un solitón que se desplaza a una velocidad  $v_1$  en dos solitones que se desplazan a las velocidades  $v_2$  y  $c_{21}$ . Esta solución la representamos en la figura 3.2 donde hemos tomado  $p = 4$ ,  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 2$ ,  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b_1 = 9$  y  $b_2 = 2$ .

a)  $t = -1$ b)  $t = -0.5$

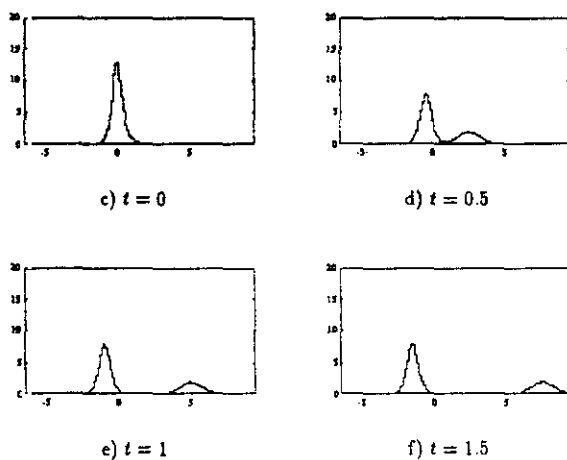


Figura 3.2: Fisión

### 3.2.2 Soluciones solitónicas de Kaup

Al igual que hicimos en la sección 2.7 podemos aplicar el método de revestimiento partiendo de soluciones triviales diferentes de (3.14). Consideremos en este caso la función  $\tau'_0(l, x)$  definida como:

$$\tau'_0(l, x) = t^{-l^2} e(x) \delta_{l_1+l_2, 0} \quad (3.32)$$

donde la función  $e(x)$  viene dada por:

$$e(x) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{\infty} n x_n^{(1)} x_n^{(2)} \right). \quad (3.33)$$

Vamos a comprobar en primer lugar que  $\tau'_0(l, x)$  es solución de la jerarquía de KP en dos componentes. Con este fin empezamos por tener en cuenta

que de (3.33) se sigue:

$$\begin{aligned} e\left(x \pm \epsilon_1\left(\frac{1}{k}\right)\right) &= e(x) e^{\mp \ell\left(\frac{1}{k}, x^{(2)}\right)} \\ e\left(x \pm \epsilon_2\left(\frac{1}{k}\right)\right) &= e(x) e^{\mp \ell\left(\frac{1}{k}, x^{(1)}\right)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Introduciendo (3.32) y (3.34) en (2.17) para  $N = 2$  y suponiendo ahora que hemos tomado para  $\gamma$  la circunferencia orientada positivamente  $|k| = 1$ , encontramos que:

$$\oint_{\gamma} dk \left\{ e^{\ell(k, x^{(1)}) - x^{(1)'}} e^{\ell\left(\frac{1}{k}, x^{(2)} - x^{(2)'}\right)} k^{l_1 - l_1' - 2} \delta_{l_1 + l_2 - 1, 0} \delta_{l_1' + l_2' + 1, 0} - \right. \\ \left. e^{\ell\left(\frac{1}{k}, x^{(1)} - x^{(1)'}\right)} e^{\ell(k, x^{(2)} - x^{(2)'})} k^{l_2 - l_2' - 2} \delta_{l_1 + l_2 - 1, 0} \delta_{l_1' + l_2' + 1, 0} \right\} = 0$$

lo que puede comprobarse, haciendo en el segundo sumando el cambio de variables  $k \rightarrow \frac{1}{k}$ . Definimos ahora la función  $\sigma(l, x)$  mediante

$$\tau(l, x) = \tau_0(l, x) \sigma(l, x) \quad (3.35)$$

luego en términos de las funciones  $\sigma$  la forma bilineal de la jerarquía de KP en dos componentes queda como:

$$\oint_{\gamma} dk k^{l_1 - l_1' - 2} \left\{ \sigma(l_1 - 1, -l_1 + 1, x - \epsilon_1\left(\frac{1}{k}\right)) \sigma(l_1' + 1, -l_1' - 1, x' + \epsilon_1\left(\frac{1}{k}\right)) - \right. \\ \left. \sigma(l_1, -l_1, x - \epsilon_2(k)) \sigma(l_1', -l_1', x' + \epsilon_2(k)) \right\} e^{\ell(k, x^{(1)}) - x^{(1)'}} e^{\ell\left(\frac{1}{k}, x^{(2)} - x^{(2)'}\right)} = 0$$

Tomando ahora  $l_1 = 1, l_1' = 0$  y definiendo

$$\sigma_1 = \sigma(0, 0, x)$$

$$\sigma_2 = \sigma(1, -1, x)$$

encontramos

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \left\{ \sigma_1\left(x - \epsilon_1\left(\frac{1}{k}\right)\right) \sigma_2(x' + \epsilon_1\left(\frac{1}{k}\right)) - \right. \\ \left. \sigma_2(x - \epsilon_2(k)) \sigma_1(x' + \epsilon_2(k)) \right\} e^{\ell(k, x^{(1)}) - x^{(1)'}} e^{\ell\left(\frac{1}{k}, x^{(2)} - x^{(2)'}\right)} = 0 \quad (3.36)$$

Realizando el cambio de variables  $x \rightarrow x - y, x' \rightarrow x + y$ , teniendo en cuenta (2.19) y evaluando la integral en (3.36) como el residuo en el origen encontramos:

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} S_n(-2y^{(1)}) S_m(-2y^{(2)}) e^{yD} [S_{n-m}(\tilde{D}^{(1)}) \sigma_2 \sigma_1 - S_{m-n}(\tilde{D}^{(2)}) \sigma_1 \sigma_2] = 0 \quad (3.37)$$



donde los símbolos  $S_n$  denotan de nuevo los polinomios de Schur. Utilizando ahora la expresión (2.22) para los polinomios de Schur y teniendo en cuenta que la expresión (3.37) es válida para todo valor de  $y$  llegamos a:

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\alpha|} D^\beta}{\alpha! \beta!} \left[ S_{[\alpha^{(1)}]-[\alpha^{(2)}]}(\tilde{D}^{(1)}) \sigma_2(x) \sigma_1(x) - S_{[\alpha^{(1)}]-[\alpha^{(2)}]}(\tilde{D}^{(2)}) \sigma_1(x) \sigma_2(x) \right] = 0 \quad (3.38)$$

Tomando ahora en (3.38) para  $\gamma$  los valores:

$$\gamma^{(1)} = (0, 1, 0, \dots); \quad \gamma^{(2)} = (0, 0, 0, \dots)$$

$$\gamma^{(1)} = (0, 0, 0, \dots); \quad \gamma^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$$

$$\gamma^{(1)} = (0, 1, 0, \dots); \quad \gamma^{(2)} = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\gamma^{(1)} = (1, 0, 0, \dots); \quad \gamma^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$$

encontramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} (D_2^{(1)} + D_1^{(1)^2}) \sigma_1 \sigma_2 &= 0 \\ (-D_2^{(2)} + D_1^{(2)^2}) \sigma_1 \sigma_2 &= 0 \\ [D_1^{(2)}(D_2^{(1)} + D_1^{(1)^2}) - 4D_1^{(1)}] \sigma_1 \sigma_2 &= 0 \\ [D_1^{(1)}(-D_2^{(2)} + D_1^{(2)^2}) - 4D_1^{(2)}] \sigma_1 \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sabemos, que mediante la acción de los elementos  $g \in Gl(2\infty)$  sobre la solución trivial (3.32) y teniendo en cuenta (3.35) podemos obtener funciones  $\sigma$  soluciones de (3.39). En particular si tomamos elementos de la forma (3.15) que satisfacen (3.6), de (3.34) es inmediato comprobar que las funciones  $\sigma$  obtenidas, son de nuevo independientes de las variables  $y_n$ . Para las funciones  $\sigma_1, \sigma_2$ , obtenidas de este modo, teniendo en cuenta el cambio de variables (3.16) las ecuaciones (3.39) se reducen a

$$\begin{aligned} (D_t + D_x^2) \sigma_1 \sigma_2 &= 0, \\ [D_x(D_t + D_x^2) + 16D_x] \sigma_1 \sigma_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si definimos en este caso las funciones  $u, w$  como

$$u = 2\partial_x \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad w = 16 + 2\partial_x^2 \log \sigma_1 \sigma_2 \quad (3.41)$$

llegamos de nuevo al sistema Boussinesq (3.13).

Para encontrar ahora soluciones  $\sigma_1, \sigma_2$  de (3.40) reales, tenemos que tomar elementos  $g \in Gl(2\infty)$  de la forma:

$$g = \exp \left\{ i \sum_{r=1}^{M_1} a_r \psi^{(1)}(p_r) \psi^{(2)*}(p_r) + i \sum_{s=1}^{M_2} b_s \psi^{(2)}(q_s) \psi^{(1)*}(q_s) \right\} \quad (3.42)$$

siendo  $a_r, b_s, p_r, q_s$  ( $r = 1, \dots, M_1, s = 1, \dots, M_2$ ) parámetros reales que satisfacen  $\{p_r\}_{r=1}^{M_1} \cap \{q_s\}_{s=1}^{M_2} = \emptyset$ . En particular el caso más sencillo viene dado por:

$$g = \exp[ia\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)], \quad a, p \in \mathbb{R},$$

desarrollando la exponencial encontramos:

$$g = 1 + ia\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)$$

y teniendo en cuenta que

$$e \left( x - \epsilon_1 \left( \frac{1}{p} \right) + \epsilon_2 \left( \frac{1}{p} \right) \right) = e(x) e^{-\epsilon \left( \frac{1}{p}, x^{(1)} - x^{(2)} \right)} \frac{p^2}{p^2 - 1}$$

encontramos

$$\sigma_1(x, t) = 1 + \frac{ap}{p^2 - 1} \exp \left\{ 2 \left( p - \frac{1}{p} \right) x + 4 \left( p^2 - \frac{1}{p^2} \right) t \right\},$$

$$\sigma_2(x, t) = 1 + \frac{ap^3}{p^2 - 1} \exp \left\{ 2 \left( p - \frac{1}{p} \right) x + 4 \left( p^2 - \frac{1}{p^2} \right) t \right\},$$

y finalmente de (3.41) tenemos para  $u$  y  $w$

$$u = -\frac{4\text{sh}^2 \gamma_0}{\text{sh}^2 \frac{\gamma_0}{2} + \text{ch}^2(kx - \omega t + \varphi)}, \quad \omega^2 = 4k^2(k^2 + 4) \quad (3.43)$$

y

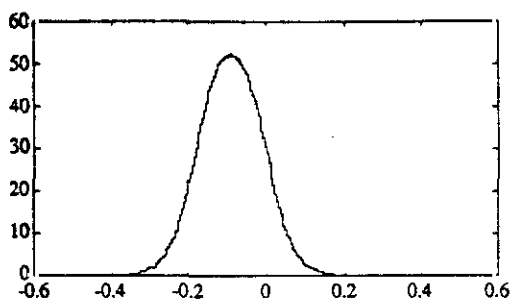
$$w = 16 + 8\text{sh}^2 \gamma_0 \left\{ \text{sech}^2 \left( kx - \omega t + \varphi - \frac{\gamma_0}{2} \right) + \text{sech}^2 \left( kx - \omega t + \varphi + \frac{\gamma_0}{2} \right) \right\}$$

siendo

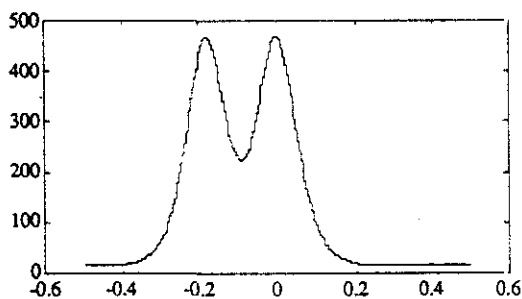
$$k = p - \frac{1}{p}, \quad \omega = 2 \left( \frac{1}{p^2} - p^2 \right)$$

$$\gamma_0 = \log p, \quad \varphi = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{2} \log \left( \frac{ap}{p^2 - 1} \right)$$

en este caso es la función velocidad  $u$  la que toma la forma de una estructura localizada, mientras que la amplitud es la superposición de dos estructuras localizadas iguales, centradas en puntos diferentes. En la figura 3.3 representamos esta solución para la elección de parámetros  $a = \frac{224}{15}$ ,  $p = 15$ .



-u (velocidad)



w (altura)

Figura 3.3

Queremos ahora estudiar el comportamiento de estos solitones bajo interacción [34], [35], [36], [25], [45]. Para ello tenemos que considerar la

solución generada por el elemento de  $Gl(2\infty)$  (3.42). En primer lugar vamos a ver que la expresión (3.42) puede simplificarse, con este fin veamos como actúan los operadores  $i\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)$ ,  $i\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q)$  sobre la solución trivial  $\tau'_0$ . Tenemos entonces que:

$$i\psi^{(1)}(p)\psi^{(2)*}(p)\tau'_0 = \tau'_0 \frac{p^{2l_1+1}}{p^2-1} e^{\xi(p, x^{(1)}-x^{(2)})-\xi(\frac{1}{p}, x^{(1)}-x^{(2)})},$$

$$i\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q)\tau'_0 = \tau'_0 \left(-\frac{q^{-2l_1+1}}{q^2-1}\right) e^{-\xi(q, x^{(1)}-x^{(2)})+\xi(\frac{1}{q}, x^{(1)}-x^{(2)})},$$

es decir, que la acción sobre  $\tau'_0$  de  $i\psi^{(2)}(q)\psi^{(1)*}(q)$  es igual a la acción de  $i\psi^{(1)}(\frac{1}{q})\psi^{(2)*}(\frac{1}{q})$  con lo que podemos tomar sin pérdida de generalidad

$$g = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^M a_j \psi^{(1)}(p_j) \psi^{(2)*}(p_j) \right\} \quad (3.44)$$

desarrollando la exponencial podemos escribir

$$g = \sum_I A(I)$$

donde la suma está extendida a todos los subconjuntos  $I : I \subset \{1, \dots, M\}$  y  $A(I)$  está definido como:

$$A(I) = \prod_{j \in I} i a_j \psi^{(1)}(p_j) \psi^{(2)*}(p_j).$$

para ver como actúa  $A(I)$  sobre  $\tau'_0$  debemos empezar por calcular la expresión del producto de operadores de vértice

$$\psi^{(1)}(k_1) \psi^{(2)*}(k_1) \psi^{(1)}(k_2) \psi^{(2)*}(k_2) \dots \psi^{(1)}(k_r) \psi^{(2)*}(k_r) \quad (3.45)$$

pero dicho producto podemos analizarlo facilmente teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon\left(\frac{1}{k_j}\right)^{\bar{\Phi}^{(1)}}} e^{\xi(k_j, x^{(1)})} &= \left(1 - \frac{k_l}{k_j}\right) e^{\xi(k_l, x^{(1)})} e^{-\epsilon\left(\frac{1}{k_j}\right)^{\bar{\Phi}^{(1)}}} & j < l \\ e^{\epsilon\left(\frac{1}{k_j}\right)^{\bar{\Phi}^{(2)}}} e^{-\xi(k_j, x^{(2)})} &= \left(1 - \frac{k_l}{k_j}\right) e^{-\xi(k_l, x^{(2)})} e^{\epsilon\left(\frac{1}{k_j}\right)^{\bar{\Phi}^{(2)}}} & j < l \end{aligned}$$

y (3.45) viene entonces dado por

$$\begin{aligned} & (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)+r l_2} \prod_{j=1}^r \left\{ k_j^{l_1-l_2-1} \prod_{l < j} \left( \frac{1}{k_l} - \frac{1}{k_j} \right)^2 e^{\xi(k_l, x^{(1)}-x^{(2)})} \right\} \\ & \cdot \exp \left[ - \sum_{j=1}^r \epsilon \left( \frac{1}{k_j} \right)^{\bar{\Phi}^{(1)}} + \sum_{j=1}^r \epsilon \left( \frac{1}{k_j} \right)^{\bar{\Phi}^{(2)}} \right] T_1^{-r} T_2^r. \end{aligned} \quad (3.46)$$

como además necesitamos aplicar productos de la forma (3.45) a  $\tau'_0$  calculamos

$$\begin{aligned} e \left( x - \sum_{j=1}^r \epsilon_1 \left( \frac{1}{k_j} \right) + \sum_{j=1}^r \epsilon_2 \left( \frac{1}{k_j} \right) \right) = \\ \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} n \left( x_n^{(1)} - \sum_{j=1}^r \frac{1}{n k_j^n} \right) \left( x_n^{(2)} + \sum_{j=1}^r \frac{1}{n k_j^n} \right) \right\} = \\ e(x) \prod_{j=1}^r e^{-\epsilon(\frac{1}{k_j}, x^{(1)} - x^{(2)})} \prod_{j,l=1}^r \frac{k_j k_l}{k_j k_l - 1}. \end{aligned}$$

Teniendo entonces en cuenta (3.46) llegamos a:

$$A(I) \tau'_0 = \tau'_0 a(l_1, I) \prod_{j \in I} \exp \left[ 2 \left( p_j - \frac{1}{p_j} \right) x + 4 \left( p_j^2 - \frac{1}{p_j^2} \right) t \right]$$

donde hemos definido  $a(l_1, I)$  como

$$a(l_1, I) = \prod_{j \in I} \left\{ a_j p_j^{2l_1-1} \prod_{\substack{l \in I \\ l < j}} \left( \frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_l} \right)^2 \prod_{l \in I} \frac{p_j p_l}{p_j p_l - 1} \right\}.$$

Entonces las funciones  $\sigma_1(x, t)$ ,  $\sigma_2(x, t)$  soluciones de (3.40) vienen dadas por:

$$\sigma_1(x, t) = \sum_I a(0, I) \prod_{j \in I} \exp[2k_j(x - v_j t)],$$

$$\sigma_2(x, t) = \sum_I a(1, I) \prod_{j \in I} \exp[2k_j(x - v_j t)],$$

siendo

$$k_j = p_j - \frac{1}{p_j}, \quad v_j = -2 \left( p_j + \frac{1}{p_j} \right).$$

Una vez encontradas las soluciones procedemos a discutir el resultado, para ello vamos a tomar a partir de ahora  $k_j > 0$  ( $p_j > 1$ ) y suponemos que hemos ordenado las velocidades de modo que  $v_1 > v_2 > \dots > v_M$ . Consideremos las funciones  $\sigma_1, \sigma_2$  evaluadas en  $(x + v_m t, t)$ , queremos determinar el comportamiento de dichas funciones en los límites asintóticos  $t \rightarrow \pm\infty$ . Definimos con este fin los conjuntos de índices  $I_m^\pm$  como  $I_m^\pm = \{1 \leq l \leq$

$M : \pm(l-m) > 0$ , entonces es fácil ver que cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  los términos dominantes en  $\sigma_1, \sigma_2$  vienen dados por

$$\sigma_1 \sim \prod_{j \in I_m^\pm} e^{2k_j(x-v_j t)} \left\{ 1 + \frac{a(0, I_m^\pm \cup \{m\})}{a(0, I_m^\pm)} e^{2k_m(x-v_m t)} \right\}$$

$$\sigma_2 \sim \prod_{j \in I_m^\pm} e^{2k_j(x-v_j t)} \left\{ 1 + \frac{a(1, I_m^\pm \cup \{m\})}{a(1, I_m^\pm)} e^{2k_m(x-v_m t)} \right\}$$

teniendo en cuenta que:

$$\frac{a(l_1, I_m^\pm \cup \{m\})}{a(l_1, I_m^\pm)} = \frac{a_m p_m^{2l_1+1}}{p_m^2 - 1} \prod_{j \in I_m^\pm} \left( \frac{1}{p_m} - \frac{1}{p_j} \right)^2 \left( \frac{p_m p_j}{p_m p_j - 1} \right)^2$$

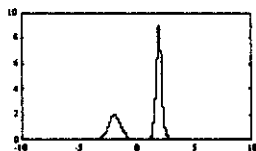
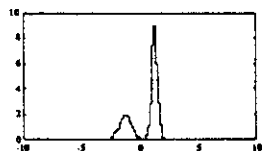
encontramos que la función  $u$  toma asintóticamente la misma expresión que en (3.43) donde ahora

$$k_m = \left( p_m - \frac{1}{p_m} \right), \quad \omega_m = -2 \left( p_m^2 - \frac{1}{p_m^2} \right), \quad \gamma_{0,m} = \log p_m,$$

$$\varphi_m^\pm = \frac{\gamma_{0,m}}{2} + \frac{1}{2} \log \left[ \frac{a_m p_m}{p_m^2 - 1} \prod_{j \in I_m^\pm} \left( \frac{1}{p_m} - \frac{1}{p_j} \right)^2 \left( \frac{p_m p_j}{p_m p_j - 1} \right)^2 \right],$$

es decir, que asociado a cada velocidad  $v_m$   $m = 1, \dots, M$  existe un solitón que al interaccionar con los demás mantiene su forma experimentando sólo un cambio de fase. Finalmente si consideramos  $v \neq v_m$   $m = 1, \dots, M$  es inmediato ver que sobre el rayo  $x + vt$ ,  $u$  se anula asintóticamente en ambos límites  $t \rightarrow \pm\infty$ , luego la solución generada a partir de (3.44) está formada por  $M$  solitones que interaccionan sin cambiar su forma.

Para ilustrar el proceso de interacción representamos en la figura 3.4 la solución para  $M = 2$  donde hemos tomado  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 4$ ,  $a_1 = \frac{3}{2}$  y  $a_2 = \frac{13}{4}$ .


 a)  $t = -1$ 

 b)  $t = -0.6$

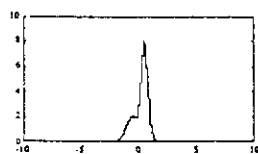
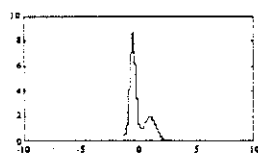
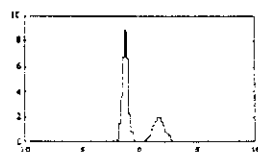
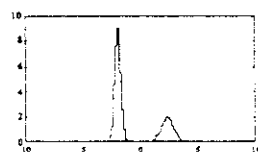
c)  $t = -0.2$ d)  $t = 0.2$ e)  $t = 0.6$ f)  $t = 1$ 

Figura 3.4

## Capítulo 4

# La ecuación de Davey-Stewartson

La ecuación de Davey-Stewartson DS, juega un papel fundamental en el estudio de sistemas integrables debido tanto a sus aplicaciones físicas como a las propiedades que exhiben sus soluciones. En particular, algunas de sus soluciones, conocidas como dromiones, son estructuras coherentes bidimensionales que no conservan su forma bajo interacción [2,3,4,5,6,7,8,21,22,47]. En este capítulo vamos a obtener la ecuación DS del formalismo bilineal, de este modo, a partir de los operadores de vértice podremos construir soluciones y estudiar propiedades de las mismas.

### 4.1 La ecuación de Davey-Stewartson como reducción de la jerarquía de KP en dos componentes

La ecuación DS está relacionada con el sistema de ecuaciones bilineales (2.25) para  $N = 2$ . Para obtener DS a partir de (2.25) empezamos por definir las funciones  $\tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  de acuerdo con

$$\begin{aligned}\tau_1(x) &= \tau(l_0, x), \\ \tau_2(x) &= \tau(l_0 + e_1 - e_2, x), \\ \tau_3(x) &= \tau(l_0 - e_1 + e_2, x),\end{aligned}$$

Tomando ahora  $s = e_1 + e_2$ ,  $l = l_0 + e_1$ ,  $\tau' = \tau$  encontramos

$$D_2^{(2)} \tau_2 \cdot \tau_1 + D_1^{(2)^2} \tau_1 \cdot \tau_2 = 0, \quad (4.1)$$



$$D_2^{(1)} \tau_1 \cdot \tau_2 + D_1^{(1)^2} \tau_2 \cdot \tau_1 = 0, \quad (4.2)$$

donde hemos elegido  $\gamma^{(1)} = (0, 0, \dots)$ ,  $\gamma^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$ , para (4.1) y  $\gamma^{(1)} = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\gamma^{(2)} = (0, 0, \dots)$ , para (4.2). Para el mismo  $s$ , los mismos conjuntos  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$  y  $l = l_0 + e_2$  tenemos:

$$D_2^{(2)} \tau_1 \cdot \tau_3 + D_1^{(2)^2} \tau_3 \cdot \tau_1 = 0, \quad (4.3)$$

$$D_2^{(1)} \tau_3 \cdot \tau_1 + D_1^{(1)^2} \tau_1 \cdot \tau_3 = 0, \quad (4.4)$$

Finalmente, tomando  $s = 2e_1$ ,  $l = l_0 + e_1$ ;  $\gamma^{(1)} = (0, 0, \dots)$ ,  $\gamma^{(2)} = (1, 0, 0, \dots)$  encontramos:

$$D_1^{(1)} D_1^{(2)} \tau_1 \cdot \tau_1 - 2\tau_2 \cdot \tau_3 = 0. \quad (4.5)$$

Si realizamos ahora el cambio de variables

$$x_1^{(1)} = \frac{x}{2}, \quad x_1^{(2)} = \frac{y}{2}, \quad x_2^{(1)} = -i \frac{t - t'}{4}, \quad x_2^{(2)} = i \frac{t + t'}{4} \quad (4.6)$$

y definimos:

$$p = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad q = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad U = \log \tau_1 \quad (4.7)$$

las ecuaciones bilineales (4.1)-(4.5) nos llevan al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} -ip_t + p_{xx} + p_{yy} + 2(U_{xx} + U_{yy})p &= 0, \\ iq_t + q_{xx} + q_{yy} + 2(U_{xx} + U_{yy})q &= 0, \\ qp &= 4U_{xy}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como (4.8) no incluye ninguna derivada con respecto a las variables  $t'$ ,  $x_n^{(1)}$   $n \geq 3$ , podemos a partir de ahora tomar  $t' = 0$   $x_n^{(1)} = 0$   $n \geq 3$ . Si además hacemos  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$  e imponemos la reducción:

$$\tau_1 = \tau_1^*, \quad \tau_3 = \tau_2^* \quad (4.9)$$

(4.8) se convierte en el sistema:

$$\begin{aligned} iq_t + q_{xx} + q_{yy} + 2(U_{xx} + U_{yy})q &= 0, \\ |q|^2 &= 4U_{xy} \end{aligned} \quad (4.10)$$

que implica que  $q$  satisface la ecuación de Davey-Stewartson

$$\begin{aligned} iq_t + q_{xx} + q_{yy} + (U_1 + U_2)q &= 0, \\ U_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^y dy' |q|_x^2 + u_1; \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' |q|_y^2 + u_2$$

donde:

$$u_1(x, t) = 2\partial_x^2 \log \tau_1(x, -\infty, t), \quad u_2(y, t) = 2\partial_y^2 \log \tau_1(-\infty, y, t).$$

De (4.1)-(4.6) y (4.9) tenemos que en términos de los operadores diferenciales de Hirota la forma de la ecuación de DS [49] viene dada por:

$$\begin{aligned} (-iD_t + D_x^2 + D_y^2)\tau_1 \cdot \tau_3 &= 0, \\ 2D_x D_y \tau_1 \cdot \tau_1 &= |\tau_3|^2. \end{aligned}$$

A partir de las últimas ecuaciones de (4.7) y (4.10) se deduce que

$$|q|^2 = 4\partial_x \partial_y \log \tau_1(x, y, t)$$

de donde vemos que  $\tau_1$  es la función más relevante en la teoría bilineal de la ecuación DS.

A partir de ahora tomaremos  $l_0 = (0, 0)$  y por tanto

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \tau(0, 0, x), \\ \tau_2(x) &= \tau(1, -1, x), \\ \tau_3(x) &= \tau(-1, 1, x), \end{aligned} \tag{4.12}$$

## 4.2 Soluciones de la ecuación de DS en términos de operadores de vértice

Hemos visto que la ecuación de DS aparece como una reducción de la jerarquía KP en 2 componentes. Para encontrar soluciones tendremos que partir de los elementos  $g \in Gl(2\infty)$  tales que sus realizaciones en términos de operadores de vértice nos generen funciones  $\tau$  que satisfagan la condición de reducción (4.9). Para ello consideramos el operador  $e$  que actúa sobre funciones en  $\mathcal{F}$  como:

$$e\tau(l, x) = (-1)^{\theta(l)} \tau^*(-l, x) \tag{4.13}$$

donde la función  $\theta(l)$  está definida por:

$$\theta(l) = \sum_{j=1}^N \left\{ j l_j + \frac{1}{2} l_j (l_j + 1) \right\} \tag{4.14}$$

haciendo actuar de nuevo el operador  $e$  sobre  $\tau(l, x)$  encontramos

$$e^2 \tau(l, x) = (-1)^{\theta(l) + \theta(-l)} \tau(l, x).$$

Dado que

$$(-1)^{\theta(l)+\theta(-l)} = (-1)^{\sum_{j=1}^N l_j^2} = (-1)^{\sum_{j=1}^N l_j},$$

es entonces evidente que el operador  $e^{-1}$ , inverso del operador  $e$ , viene dado por:

$$e^{-1}\tau(l, x) = (-1)^{\sum_{j=1}^N l_j + \theta(l)} \tau^*(-l, x).$$

Supongamos ahora que consideramos elementos  $g \in Gl(2\infty)$  invariantes bajo  $e$ , es decir:

$$ege^{-1} = g \quad (4.15)$$

y funciones  $\tau \in \mathcal{F}$  generadas mediante la acción de los  $g$  que satisfacen (4.15) sobre la solución trivial  $\tau_0(l, x) = \delta_{l,0} \delta_{l,0}$ . Entonces:

$$\tau(l, x) = g\delta_{l,0} = ege^{-1}\delta_{l,0} = ege^{-1}e\delta_{l,0} =$$

$$eg\delta_{l,0} = e\tau(l, x) = (-1)^{\theta(l)} \tau^*(-l, x).$$

Particularizando para  $N = 2$ ,  $l = (0, 0)$  y  $l = (1, -1)$  obtenemos

$$\tau(0, 0, x) = \tau^*(0, 0, x)$$

$$\tau(1, -1, x) = \tau^*(-1, 1, x)$$

y teniendo en cuenta (4.12) vemos que se verifica la condición de reducción (4.9). El problema de obtener soluciones de la ecuación DS nos queda convertido en encontrar elementos  $g \in Gl(2\infty)$  cuya realización en términos de operadores de vértice satisfaga (4.15). Para obtener las representaciones de dichos elementos debemos considerar en primer lugar como se transforman bajo  $e$  los operadores  $\psi^{(i)}(k)$ ,  $\psi^{(i)*}(k)$ .

Supongamos que las variables  $x_n^{(i)}$  satisfacen

$$x_n^{(i)*} = (-1)^{n+1} x_n^{(i)}.$$

Asumiendo (4.6) junto con  $x_n^{(i)} = 0, n \geq 3$ , vemos que tal condición se cumple para el caso de DS. Entonces se sigue que:

$$ex_n^{(i)}e^{-1} = (-1)^{n+1} x_n^{(i)}; \quad e\partial_{x_n^{(i)}}e^{-1} = (-1)^{n+1} \partial_{x_n^{(i)}} \quad (4.16)$$

y por tanto

$$e\xi(k, x^{(i)})e^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n^{(i)} (k^*)^n = -\xi(-k^*, x^{(i)}) \quad (4.17)$$

$$e\epsilon\left(\frac{1}{k}\right)\tilde{\nabla}^{(i)}e^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(k^*)^n} \frac{\partial}{\partial x_n^{(i)}} = -\epsilon\left(\frac{1}{-k^*}\right)\tilde{\nabla}^{(i)}$$

Para averiguar como se transforman bajo el operador  $e$  los operadores de vértice necesitamos también conocer como se transforman los operadores de translación  $T_j$  del índice discreto  $l_j$

$$\begin{aligned} eT_j e^{-1}\tau(l, x) &= eT_j(-1)\sum_{i=1}^N l_i + \theta(l)\tau^*(-l, x) = \\ &= e(-1)\sum_{i=1}^N l_i + \theta(l + e_j) + 1\tau^*(-l - e_j, x) = \\ &= (-1)^{\theta(l) + \theta(-l + e_j) - \sum_{i=1}^N l_i + 1}\tau(l - e_j, x). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como (4.14) implica

$$\theta(l) + \theta(-l + e_j) - \sum_{i=1}^N l_i + 1 = j - l_j + \sum_{i=1}^N l_i(l_i - 1) + 2$$

se verifica

$$(-1)^{\theta(l) + \theta(-l + e_j) - \sum_{i=1}^N l_i + 1} = (-1)^{j - l_j}. \quad (4.19)$$

Así (4.18) y (4.19) nos dicen que

$$eT_j e^{-1} = (-1)^{j + l_j} T_j^{-1}. \quad (4.20)$$

La acción de  $e$  sobre el operador  $T_j^{-1}$  la encontramos invirtiendo (4.20), vemos entonces que

$$eT_j^{-1}e^{-1} = T_j(-1)^{j + l_j} = (-1)^{j + l_j + 1}T_j \quad (4.21)$$

luego a partir de (4.16), (4.17), (4.20), (4.21) y (2.16) se sigue finalmente que los operadores de vértice  $\psi^{(i)}(k)$ ,  $\psi^{(i)*}(k)$  se transforman bajo  $e$  como:

$$\begin{aligned} e\psi^{(i)}(k)e^{-1} &= (-1)^{i+1}(k^*)^{-1}\psi^{(i)*}(-k^*) \\ e\psi^{(i)*}(k)e^{-1} &= (-1)^{i+1}k^*\psi^{(i)}(-k^*). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Queremos ahora encontrar la expresión cuadrática más sencilla en términos de operadores de vértice que sea invariante bajo  $e$ . De las ecuaciones (4.22) vemos que

$$e\psi^{(i)}(p)\psi^{(j)*}(q)e^{-1} = (-1)^{i+j}\left(\frac{q}{p}\right)^* \psi^{(i)*}(-p^*)\psi^{(j)}(-q^*) \quad p \neq q \quad (4.23)$$

luego la expresión que buscamos será de la forma

$$a\psi^{(i)}(p)\psi^{(j)*}(-q^*) + a'\psi^{(j)}(q)\psi^{(i)*}(-p^*) \quad p + q^* \neq 0. \quad (4.24)$$

Para encontrar las relaciones que deben satisfacer  $a$  y  $a'$  imponemos que (4.24) sea invariante bajo  $e$  y utilizamos (4.23)

$$\begin{aligned} & e\{a\psi^{(i)}(p)\psi^{(j)*}(-q^*) + a'\psi^{(j)}(q)\psi^{(i)*}(-p^*)\}e^{-1} = \\ & a^*(-1)^{i+j}\frac{q}{p^*}\psi^{(j)}(q)\psi^{(i)*}(-p^*) + (a')^*(-1)^{i+j}\frac{p}{q^*}\psi^{(i)}(p)\psi^{(j)*}(-q^*) \end{aligned} \quad (4.25)$$

entonces, para que el segundo miembro de (4.25) coincida con (4.24) la condición que debe verificarse es

$$aq^* = (-1)^{i+j}a'^*p. \quad (4.26)$$

En el caso particular  $i = j$  vemos que  $a\psi^{(i)}(q)\psi^{(i)*}(-q^*)$  es invariante bajo  $e$  si se satisface  $aq^* = (aq^*)^*$ , es decir  $aq^* \in \mathbb{R}$ . Cualquier combinación lineal, con coeficientes reales, de elementos de la forma (4.24) es entonces invariante bajo  $e$ , de este modo podemos obtener soluciones de la ecuación DS mediante la aplicación a la solución trivial  $\tau_0(l, x) = \delta_{l0}$  de elementos de  $GL(2\infty)$  cuya realización en términos de operadores de vértice sea de la forma:

$$g = \exp \sum_{i,j=1,2} \sum_{l=1}^{N^{(i)}} \sum_{m=1}^{N^{(j)}} a_{lm}^{ij} \psi^{(i)}(q_l^{(i)}) \psi^{(j)*}(-q_m^{(j)*}), \quad (4.27)$$

donde  $q_l^{(i)} = (q_l^{(i)})_R + i(q_l^{(i)})_I$  son  $N^{(i)}$  puntos diferentes en la circunferencia  $\gamma$  que satisfacen

$$q_l^{(i)} + q_{l'}^{(i)*} \neq 0 \quad : \quad 1 \leq l, l' \leq N^{(i)}, \quad (4.28)$$

y los coeficientes  $a_{lm}^{ij}$  son números complejos que verifican

$$a_{lm}^{ij} q_m^{(j)*} = (-1)^{i+j} (a_{mi}^{ji} q_l^{(i)*})^*. \quad (4.29)$$

Denotando ahora

$$A_{lm}^{ij} = a_{lm}^{ij} \psi^{(i)}(q_l^{(i)}) \psi^{(j)*}(-q_m^{(j)*})$$

(4.27) se puede escribir como

$$g = \exp \sum_{i,j=1,2} \sum_{l=1}^{N^{(i)}} \sum_{m=1}^{N^{(j)}} A_{lm}^{ij}. \quad (4.30)$$

De las reglas de anticonmutación de los operadores de vértice y de la condición (4.28) se sigue que:

$$[A_{lm}^{ij}, A_{l'm'}^{i'j'}] = 0$$

lo que permite escribir en (4.30) la exponencial de la suma como producto de exponenciales, es decir:

$$g = \prod_{i,j=1,2} \prod_{l=1}^{N^{(i)}} \prod_{m=1}^{N^{(j)}} \exp A_{lm}^{ij}. \quad (4.31)$$

De las reglas de anticonmutación se deduce que:

$$(A_{lm}^{ij})^2 = 0$$

lo que hace que el desarrollo de la exponencial de (4.31) se reduzca a:

$$\exp A_{lm}^{ij} = 1 + A_{lm}^{ij}$$

y entonces (4.31) puede escribirse como:

$$g = \prod_{i,j=1,2} \prod_{l=1}^{N^{(i)}} \prod_{m=1}^{N^{(j)}} [1 + A_{lm}^{ij}]. \quad (4.32)$$

Expresión que puede ser simplificada teniendo en cuenta que:

$$A_{lm}^{ij} A_{lm'}^{ij'} = A_{lm}^{ij} A_{l'm}^{ij'} = 0. \quad (4.33)$$

Vamos ahora a introducir una notación que nos permitirá llegar a un conocimiento completo de  $g$  [29], [42]. Definimos los conjuntos  $I_i, I_i^*$  como conjuntos de índices que verifican:

$$I_i, I_i^* \subset \{1, \dots, N^{(i)}\} \quad (i = 1, 2) \\ n(I_1 \cup I_2) = n(I_1^* \cup I_2^*) \quad (4.34)$$

donde  $n(I)$  denota el número de elementos de  $I$ . Dados ahora los conjuntos  $I_i, I_i^*, i = 1, 2$  definimos las particiones  $I_{ij} \subset I_i$  que verifican

$$I_i = I_{i1} \cup I_{i2} \quad , \quad I_{i1} \cap I_{i2} = \emptyset, \quad (4.35)$$

y las aplicaciones inyectivas  $\sigma_{ij} : I_{ij} \rightarrow I_j^*$ , que cumplen:

$$I_j^* = \sigma_{1j}(I_{1j}) \cup \sigma_{2j}(I_{2j}) \quad , \quad \sigma_{1j}(I_{1j}) \cap \sigma_{2j}(I_{2j}) = \emptyset. \quad (4.36)$$

De (4.32) y (4.33) vemos que los factores en (4.32) pueden agruparse en función de los índices que aparezcan en cada factor y (4.32) puede escribirse como:

$$g = \sum A(I_1, I_1^*, I_2, I_2^*), \quad (4.37)$$

donde la suma está extendida a todos los conjuntos  $I_i, I_i^*$  de la forma (4.34) y  $A(I_1, I_1^*, I_2, I_2^*)$  viene dado por:

$$A(I_1, I_1^*, I_2, I_2^*) = \sum_{i,j=1,2} \prod_{l \in I_{ij}} A_{l|\sigma_{ij}(l)}^{ij}. \quad (4.38)$$

La suma en (4.38) está extendida a todas las posibles particiones  $I_{ij}$  de la forma (4.35) y a todas las posibles aplicaciones inyectivas  $\sigma_{ij}$  de la forma (4.36). Al haber agrupado los términos de (4.32) en función de los índices que contienen, la dependencia en las variables  $x, y, t$  es común en cada término (4.38) y puede verse fácilmente que viene dada por:

$$\exp \sum_{i=1,2} \left\{ \sum_{l \in I_i} \theta_l^{(i)} + \sum_{l \in I_i^*} \theta_l^{(i)*} \right\} \quad (4.39a)$$

siendo

$$\theta_l^{(1)} = \frac{1}{2} q_l^{(1)} x - \frac{i}{4} q_l^{(1)2} t, \quad \theta_l^{(2)} = \frac{1}{2} q_l^{(2)} y + \frac{i}{4} q_l^{(2)2} t. \quad (4.39b)$$

Vimos al principio de la sección que  $\tau_1$  es el principal objeto de nuestro estudio, sólo nos interesará por tanto calcular los  $A(I_1, I_1^*, I_2, I_2^*)$  tales que al actuar sobre  $\tau_0(I, x)$  y evaluarlo en  $l = 0$  dan contribución no nula. Para ello es necesario que  $A(I_1, I_1^*, I_2, I_2^*)$  no contenga operadores de traslación en las variables discretas  $l_1, l_2$ ; es decir que el número de elementos de  $I_i$  coincida con el número de elementos de  $I_i^*$ . Un caso particular, que como veremos más adelante es el más importante, es  $I_i = I_i^*$ . En este caso a partir de la expresión (2.28) para el producto de operadores de vértice encontramos:

$$A(I_1, I_1, I_2, I_2) \delta_{l0} \approx c(I_1) c(I_2) a(I_1, I_2) \exp \left[ \sum_{i=1,2} \sum_{l \in I_i} (\theta_l^{(i)} + \theta_l^{(i)*}) \right] \delta_{l0}, \quad (4.40a)$$

siendo

$$c(I_i) = \prod_{l \in I_i} \frac{-q_l^{(i)*}}{q_l^{(i)} + q_l^{(i)*}} \prod_{l < m} \left| \frac{q_l^{(i)} - q_m^{(i)}}{q_l^{(i)} + q_m^{(i)*}} \right|^2 \quad (4.40b)$$

$$a(I_1, I_2) = \sum_{i,j=1,2} \epsilon(I_{ij}, \sigma_{ij}) \prod_{l \in I_{ij}} \prod_{l \in I_{ij}} a_{l|\sigma_{ij}(l)}^{ij}. \quad (4.40c)$$

donde la suma en (4.40c) se extiende igual que en (4.38) con  $I_i^* = I_i$ , y  $\epsilon(I_{ij}, \sigma_{ij}) = \pm 1$  es el signo de la permutación de las variables anticonmutantes

$$\prod_{i=1,2} \prod_{l \in I_i} \alpha_l^{(i)} \beta_l^{(i)} \rightarrow \prod_{i=1,2} \prod_{l \in I_i} \alpha_l^{(i)} \beta_{\sigma_{ij}(l)}^{(i)},$$

donde  $\alpha_i^{(i)} = \psi^{(i)}(q_1^{(i)})$ ,  $\beta_i^{(i)} = \psi^{(i)*}(-q_1^{(i)*})$ .

### 4.3 Estructuras coherentes. El dromión

En esta sección vamos a caracterizar la solución básica de la ecuación DS, el dromión, pudiendo de este modo estudiar sus propiedades. Consideremos en (4.27) el caso más simple, es decir  $N^{(1)} = N^{(2)} = 1$ . Para este caso los únicos términos relevantes en el desarrollo (4.32) son:

$$g = 1 + A_{11}^{11} + A_{11}^{22} + A_{11}^{12} + A_{11}^{21} + A_{11}^{12} A_{11}^{21} + A_{11}^{11} A_{11}^{22}.$$

A partir de esta expresión para  $g$  es fácil encontrar las funciones

$$\tau_1 = 1 + d_1 e^{2\mu_R z(t)} + d_2 e^{2\lambda_R y(t)} + d_3 e^{2\mu_R z(t) + 2\lambda_R y(t)}, \quad (4.41a)$$

$$\tau_3 = \tau_2^* = -2\mu a_{11}^{21} \exp[\mu x(t) + \lambda y(t) + i(|\mu|^2 + |\lambda|^2)t], \quad (4.41b)$$

donde

$$\mu = \mu_R + i\mu_I = \frac{1}{2} q_1^{(1)*}, \quad \lambda = \lambda_R + i\lambda_I = \frac{1}{2} q_1^{(2)}, \quad (4.41c)$$

$$d_i = -\frac{a_{11}^{ii} q_1^{(i)*}}{2(q_1^{(i)})_R} \quad (i = 1, 2), \quad d_3 = \frac{q_1^{(1)*} q_1^{(2)*}}{4(q_1^{(1)})_R (q_1^{(2)})_R} (a_{11}^{11} a_{11}^{22} - a_{11}^{12} a_{11}^{21}), \quad (4.41d)$$

$$x(t) = x - 2\mu_I t, \quad y(t) = y - 2\lambda_I t. \quad (4.41e)$$

Para valores positivos arbitrarios de los parámetros  $d_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) la función  $q = \frac{\tau_3}{\tau_1}$  es conocida como solución dromiónica o dromión de la ecuación DS. A partir de (4.41) obtenemos:

$$|q| = \frac{4(|d_3 - d_1 d_2|)^{\frac{1}{2}} (|\mu_R \lambda_R|)^{\frac{1}{2}} e^{\mu_R z(t) + \lambda_R y(t)}}{1 + d_1 e^{2\mu_R z(t)} + d_2 e^{2\lambda_R y(t)} + d_3 e^{2\mu_R z(t) + 2\lambda_R y(t)}} \quad (4.42)$$

que representa una perturbación exponencialmente decreciente en todas las direcciones del plano  $(x, y)$ , que se propaga sin sufrir deformación. Queremos ahora conocer el punto en el que  $|q|$  alcanza el máximo. De (4.42) se deduce que dicho punto será de la forma  $(x_C(t), y_C(t)) = (x_C + 2\mu_I t, y_C + 2\lambda_I t)$  donde  $(x_C, y_C)$  verifica las relaciones

$$e^{-\mu_R z_C - \lambda_R y_C} - d_1 e^{\mu_R z_C - \lambda_R y_C} + d_2 e^{-\mu_R z_C + \lambda_R y_C} - d_3 e^{\mu_R z_C + \lambda_R y_C}$$



$$e^{-\mu_R x_C - \lambda_R y_C} + d_1 e^{\mu_R x_C - \lambda_R y_C} - d_2 e^{-\mu_R x_C + \lambda_R y_C} - d_3 e^{\mu_R x_C + \lambda_R y_C}$$

operando con estas ecuaciones llegamos a:

$$2\mu_R x_C + 2\lambda_R y_C = -\log d_3$$

$$2\mu_R x_C - 2\lambda_R y_C = \log \frac{d_2}{d_1}$$

de donde

$$x_C = \frac{1}{4\mu_R} \log \frac{d_2}{d_1 d_3} \quad ; \quad y_C = \frac{1}{4\lambda_R} \log \frac{d_1}{d_2 d_3}. \quad (4.43)$$

Una constante del movimiento para la ecuación DS es el funcional conocido como energía de la solución  $q$ , que preferiremos llamar masa de  $q$ , ya que es esta su interpretación en el contexto de la invariancia Galileana de los operadores de Schrödinger [37]. Este funcional viene definido por:

$$M = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |q|^2 dx dy, \quad (4.44)$$

para comprobar que es una constante de la evolución consideramos su derivada respecto a la variable temporal y tenemos en cuenta (4.11), encontramos entonces

$$\frac{dM}{dt} = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\nabla} \{q^* \bar{\nabla} q - q \bar{\nabla} q^*\} dx dy.$$

Cuando  $q$  está localizado, la expresión  $q^* \bar{\nabla} q - q \bar{\nabla} q^*$  tiende a 0 en el infinito, luego:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Teniendo en cuenta que  $|q|^2 = 4\partial_x \partial_y \log \tau_1$  la expresión (4.44) puede reescribirse como:

$$M = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x \partial_y \log \tau_1 dx dy = 2 \log \frac{\tau_1(-\infty, -\infty) \tau_1(\infty, \infty)}{\tau_1(\infty, -\infty) \tau_1(-\infty, \infty)} \quad (4.45)$$

y en el caso de la solución con un solo dromión encontramos

$$M = 2 \log \frac{d_3}{d_1 d_2} \quad (4.46)$$

Para encontrar la relación existente entre la altura del dromión (máximo valor de  $|q|$ ) y la masa introducimos las expresiones (4.43) en (4.42) y teniendo en cuenta (4.46) llegamos a:

$$|q|_{max} = 2(|\lambda_R \mu_R|)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{e^{\frac{M}{2}} - 1}{e^{\frac{M}{2}} + 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para ilustrar la forma del dromión representamos  $|q|^2$  en la figura 4.1 correspondiente a la función  $\tau_1$  dada por (4.41a) y a la elección de parámetros

$$\mu_R = \lambda_R = \frac{1}{2}, \quad d_1 = d_2 = 1, \quad d_3 = 6. \quad (4.47)$$

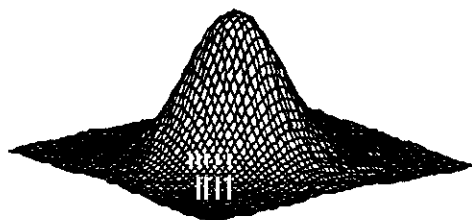


Figura 4.1: dromión

Podemos encontrar otros tipos de estructuras coherentes imponiendo que alguno de los parámetros  $d_i$  se anule: Si hacemos  $d_1 = 0$  ( $a_{11}^{11} = 0$ ) la función  $|q|$  viene dada por:

$$|q| = \frac{4d_3^{\frac{1}{2}}(|\mu_R \lambda_R|)^{\frac{1}{2}} e^{\mu_R x(t) + \lambda_R y(t)}}{1 + d_2 e^{2\lambda_R y(t)} + d_3 e^{2\mu_R x(t) + 2\lambda_R y(t)}} \quad (4.48)$$

luego tiene la forma de un kink localizado en la línea:

$$\mu_R x(t) + \lambda_R y(t) = -\log d_3^{\frac{1}{2}}. \quad (4.49)$$

Representamos esta estructura en la figura 4.2 para la misma elección de parámetros que en (4.47) excepto  $d_1 = 0$ . El resultado es análogo si consideramos  $d_2 = 0$  ( $a_{11}^{22} = 0$ ).

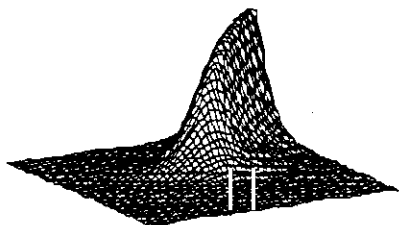


Figura 4.2:kink

Por otra parte debido a (4.41d) y a (4.29) si  $d_1 > 0$  y  $d_2 > 0$  para que  $d_3$  se anule debemos tomar  $\mu_R \cdot \lambda_R < 0$ . Entonces de (4.42) tenemos que

$$|q| = \frac{4[d_1 d_2 \mu_R \lambda_R]^{\frac{1}{2}} e^{\mu_R x(t) + \lambda_R y(t)}}{1 + d_1 e^{2\mu_R x(t)} + d_2 e^{2\lambda_R y(t)}}$$

que de nuevo tiene la forma de un kink, en este caso localizado en la línea

$$\mu_R x(t) - \lambda_R y(t) = \frac{1}{2} \log \frac{d_1}{d_2}.$$

Si suponemos que  $d_1$  y  $d_2$  se anulan simultáneamente ( $a_{11}^{11} = a_{11}^{22} = 0$ )  $|q|$  adquiere la forma:

$$|q| = 2(|\mu_R \lambda_R|)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}\{\mu_R x(t) + \lambda_R y(t) + \frac{1}{2} \log d_3\} \quad (4.50)$$

que es una estructura unidimensional localizada en la línea (4.49). Representamos dicha estructura en la figura 4.3, para  $\mu_R = \lambda_R = \frac{1}{2}$ ,  $d_3 = 6$ .

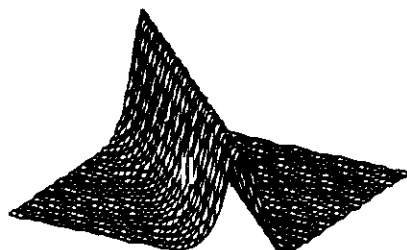


Figura 4.3

Finalmente, en el caso  $d_3 = d_1 d_2$  ( $a_{11}^{12} = 0$ ) la ecuación (4.46) junto a (4.44) implica que la función  $|q|$  se anula idénticamente.

## 4.4 Dinámica de dromiones.

Después de haber estudiado la solución con un solo dromión de la ecuación de DS queremos estudiar las propiedades dinámicas de los dromiones en soluciones multidromiónicas. Para ello realizaremos un análisis asintótico en la variable  $t$  de la función

$$|q(x, y, t)|^2 = 4\partial_x \partial_y \log \tau_1(x, y, t), \quad (4.51)$$

De lo visto hasta ahora es evidente que el comportamiento asintótico de cada contribución (4.38) de  $\tau_1$  queda determinado por el módulo de las funciones (4.39a). Para considerar estas funciones tenemos en cuenta que:

$$\operatorname{Re} \theta_l^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2}(q_l^{(1)})_R(x - v_l^{(1)}t), \quad \operatorname{Re} \theta_m^{(2)}(y, t) = \frac{1}{2}(q_m^{(2)})_R(y - v_m^{(2)}t),$$

donde

$$v_l^{(1)} = -(q_l^{(1)})_I, \quad v_m^{(2)} = (q_m^{(2)})_I; \quad l = 1, \dots, N^{(1)}, \quad m = 1, \dots, N^{(2)}.$$

luego

$$\left| \exp \sum_{i=1,2} \left\{ \sum_{l \in I_i} \theta_l^{(i)} + \sum_{l \in I_i^*} \theta_l^{(i)*} \right\} \right| =$$

$$\exp \left\{ \sum_{l \in I_1, I_1^*} \frac{1}{2} (q_l^{(1)})_R (z - v_l^{(1)} t) + \sum_{l \in I_2, I_2^*} \frac{1}{2} (q_l^{(2)})_R (z - v_l^{(2)} t) \right\} \quad (4.52)$$

De este modo hay  $N^{(1)} \cdot N^{(2)}$  velocidades características:

$$\tilde{v}_{lm} = (v_l^{(1)}, v_m^{(2)}), \quad 1 \leq l \leq N^{(1)}, \quad 1 \leq m \leq N^{(2)}$$

asociadas a (4.51). En la discusión posterior nos restringiremos a soluciones que satisfagan

$$\begin{aligned} (q_l^{(i)})_R &> 0, \quad l = 1, \dots, N^{(i)} \\ v_1^{(i)} &> v_2^{(i)} > \dots > v_{N^{(i)}}^{(i)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

#### 4.4.1 Movimiento asintótico de dromiones

Consideremos en el plano  $(x, y)$  el rayo definido por:

$$x(t) = z + v_{l_1}^{(1)} t, \quad y(t) = y + v_{l_2}^{(2)} t. \quad (4.54)$$

Queremos analizar los límites  $t \rightarrow \pm\infty$  de (4.51) sobre (4.54). Para ello definimos los conjuntos de índices  $I_{l_i}^\pm$  como:

$$I_{l_i}^\pm = \{1 \leq l \leq N^{(i)} : \pm(l - l_i) > 0\}, \quad (4.55)$$

entonces teniendo en cuenta las condiciones (4.53) y la expresión (4.52) es fácil ver que el término dominante en (4.51) viene dado por la acción sobre la solución trivial  $\delta_{l_0}$  de:

$$A(I_{l_1}^\pm, I_{l_1}^\pm, I_{l_2}^\pm, I_{l_2}^\pm) + A(I_{l_1}^\pm \cup \{l_1\}, I_{l_1}^\pm \cup \{l_1\}, I_{l_2}^\pm, I_{l_2}^\pm) + \quad (4.56)$$

$$A(I_{l_1}^\pm, I_{l_1}^\pm, I_{l_2}^\pm \cup \{l_2\}, I_{l_2}^\pm \cup \{l_2\}) + A(I_{l_1}^\pm \cup \{l_1\}, I_{l_1}^\pm \cup \{l_1\}, I_{l_2}^\pm \cup \{l_2\}, I_{l_2}^\pm \cup \{l_2\})$$

Teniendo en cuenta (4.51) y (4.56) es claro que la función  $q(x(t), y(t), t)$  se reduce cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  a la solución dromiónica dada por la función  $\tau_1$  correspondiente a (4.41) donde ahora

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2} q_{l_1}^{(1)*}, \quad \lambda = \frac{1}{2} q_{l_2}^{(2)} \\ d_1^\pm &= c_1^\pm \frac{a(I_{l_1}^\pm \cup \{l_1\}, I_{l_2}^\pm)}{a(I_{l_1}^\pm, I_{l_2}^\pm)}, \quad d_2^\pm = c_1^\pm \frac{a(I_{l_1}^\pm, I_{l_2}^\pm \cup \{l_2\})}{a(I_{l_1}^\pm, I_{l_2}^\pm)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$d_3^\pm = \frac{c_1^\pm c_2^\pm a(I_1^\pm \cup \{l_1\}, I_2^\pm \cup \{l_2\})}{a(I_1^\pm, I_2^\pm)},$$

$$c_i^\pm = \frac{c(I_i^\pm \cup \{l_i\})}{c(I_i^\pm)}, \quad i = 1, 2.$$

estando  $c$  y  $a$  definidas como en (4.40)

Hemos de señalar que estamos suponiendo que todos los parámetros de (4.57) son estrictamente positivos y que  $d_3^\pm \neq d_1^\pm d_2^\pm$ . Entonces para cada par de índices  $(l_1, l_2)$  ( $1 \leq l_i \leq N^{(i)}$ ) existe en la solución  $q(x, y, t)$  un dromión que se mueve con la velocidad  $\tilde{v}_{l_1, l_2} = (v_{l_1}^{(1)}, v_{l_2}^{(2)})$ .

Si tomamos ahora el rayo definido como:

$$x(t) = x + v^{(1)}t, \quad y(t) = y + v^{(2)}t \quad (4.58)$$

con  $(v^{(1)}, v^{(2)})$  diferente de  $(v_{l_1}^{(1)}, v_{l_2}^{(2)})$  ( $1 \leq l_i \leq N^{(i)}$ ) el único término dominante en (4.51) es el que viene dado por:

$$A(I_1^\pm, I_i^\pm, I_2^\pm, I_2^\pm) \delta_{l_0}$$

donde  $I_i^\pm = \{l \in N^{(i)} : \mp(v^{(i)} - v_l^{(i)}) > 0\}$ , luego cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $|q| \rightarrow 0$  sobre el rayo (4.58). Si  $v^{(1)} = v_{l_1}^{(1)}$  para algún  $l_1$ , entonces, la contribución dominante a  $\tau_1$ , salvo un factor exponencial que depende linealmente de las variables  $x, y$ , sólo depende de  $x$ , con lo que de nuevo  $|q|$  se anula en ambos límites asintóticos sobre (4.58); ocurre análogamente cuando  $v^{(2)} = v_{l_2}^{(2)}$ . Esto quiere decir que asintóticamente la solución se reduce a  $N^{(1)} \cdot N^{(2)}$  dromiones. Nos referiremos a esta solución de la ecuación DS como solución- $(N^{(1)}, N^{(2)})$  y al dromión que asintóticamente se desplaza con velocidad  $\tilde{v}_{l_1, l_2}$  como dromión- $(l_1, l_2)$ . En general los dromiones varían su forma bajo la interacción, para verlo basta con darse cuenta que la masa no coincide en los límites  $t \rightarrow \pm\infty$ , lo que comprobamos introduciendo (4.57) en (4.46), encontramos entonces:

$$M_{l_1, l_2}^\pm = 2 \log \frac{a(I_1^\pm \cup \{l_1\}, I_2^\pm \cup \{l_2\}) a(I_1^\pm, I_2^\pm)}{a(I_1^\pm \cup \{l_1\}, I_2^\pm) a(I_1^\pm, I_2^\pm \cup \{l_2\})}, \quad (4.59)$$

y en general  $M_{l_1, l_2}^+ \neq M_{l_1, l_2}^-$ .

Podemos ver también que la trayectoria asintótica del centro del dromión  $-(l_1, l_2)$  viene dada por  $(x_{l_1, l_2}^\pm(t), y_{l_1, l_2}^\pm(t)) = (x_{l_1, l_2}^\pm + v_{l_1}^{(1)}t, y_{l_1, l_2}^\pm + v_{l_2}^{(2)}t)$  donde  $(x_{l_1, l_2}^\pm, y_{l_1, l_2}^\pm)$  puede calcularse introduciendo (4.57) en (4.43). Para  $x_{l_1, l_2}^\pm$  encontramos:

$$x_{l_1, l_2}^\pm = \frac{1}{2(q_{l_1}^{(1)})_R} \log \left\{ \frac{1}{c_1^{\pm 2}} \frac{a(I_1^\pm, I_2^\pm \cup \{l_2\}) a(I_1^\pm, I_2^\pm)}{a(I_1^\pm \cup \{l_1\}, I_2^\pm) a(I_1^\pm \cup \{l_1\}, I_2^\pm \cup \{l_2\})} \right\},$$

y teniendo en cuenta que:

$$c_{l_1}^{\pm} = -\frac{q_{l_1}^{(1)*}}{2(q_{l_1}^{(1)})_R} \prod_{i \in I_1^{\pm}} \left| \frac{q_i^{(1)} - q_{l_1}^{(1)}}{q_i^{(1)} + q_{l_1}^{(1)*}} \right|^2$$

podemos escribir

$$z_{l_1, l_2}^{\pm} = -\frac{2}{(q_{l_1}^{(1)})_R} (\delta_{l_1}^{(1)\pm} + \Delta_{l_1, l_2}^{(1)\pm} + \frac{1}{8} M_{l_1, l_2}^{\pm}) \quad (4.60)$$

donde

$$\delta_{l_1}^{(i)\pm} = \sum_{i \in I_{l_1}^{\pm}} \log \left| \frac{q_i^{(i)} - q_{l_1}^{(i)}}{q_i^{(i)} + q_{l_1}^{(i)*}} \right| \quad (4.61a)$$

y

$$\Delta_{l_1, l_2}^{(1)\pm} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\frac{q_{l_1}^{(1)*}}{2(q_{l_1}^{(1)})_R} a(I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_2}^{\pm})}{a(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm})} \right| \quad (4.61b)$$

Análogamente:

$$y_{l_1, l_2}^{\pm} = -\frac{2}{(q_{l_2}^{(2)})_R} (\delta_{l_2}^{(2)\pm} + \Delta_{l_1, l_2}^{(2)\pm} + \frac{1}{8} M_{l_1, l_2}^{\pm}) \quad (4.62)$$

donde ahora

$$\Delta_{l_1, l_2}^{(2)\pm} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\frac{q_{l_2}^{(2)*}}{2(q_{l_2}^{(2)})_R} a(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\})}{a(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm})} \right| \quad (4.63)$$

#### 4.4.2 Movimiento asintótico de los potenciales

La ley dinámica asociada a la ecuación DS está constituida por dos tipos de interacciones. Por una parte existe en (4.11) un término no lineal y no local debido a las integrales en  $U_1 + U_2$  y además existe un término de interacción lineal debido a las funciones de contorno  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) dadas por

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2\partial_x^2 \log \tau_1(x, -\infty, t) \\ u_2(y, t) &= 2\partial_y^2 \log \tau_1(-\infty, y, t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Queremos estudiar el comportamiento asintótico de los potenciales  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) y su relación con el movimiento del dromión. De la expresión (4.37) sabemos que:

$$\begin{aligned} \tau_1(x, -\infty, t) &= \sum A(I_1, I_1^*, \phi, \phi) \delta_{l_0} \\ \tau_1(-\infty, y, t) &= \sum A(\phi, \phi, I_2, I_2^*) \delta_{l_0} \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde las sumas están extendidas a todos los conjuntos de índices  $I_i, I_i^* \subset \{1, \dots, N^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ), tales que  $I_i$  y  $I_i^*$  tengan igual número de elementos y  $\phi$  denota el conjunto vacío.

En el caso  $N^{(1)} = N^{(2)} = 1$  de (4.41a) se sigue que:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2\delta_x^2 \log(1 + d_1 e^{2\mu_R x(t)}) \\ u_2(y, t) &= 2\delta_y^2 \log(1 + d_2 e^{2\lambda_R y(t)}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

que representan dos solitones unidimensionales centrados en:

$$\begin{aligned} x_C(t) &= -\frac{1}{2\mu_R} \log d_1 + 2\mu_R t \\ y_C(t) &= -\frac{1}{2\lambda_R} \log d_2 + 2\lambda_R t \end{aligned} \quad (4.67)$$

En el caso general un análisis asintótico análogo al realizado para el estudio de la dinámica de los dromiones demuestra que la función  $u_i$  se descompone asintóticamente en  $N^{(i)}$  solitones que se desplazan con velocidades  $v_{I_i}^{(i)}$   $1 \leq I_i \leq N^{(i)}$   $i = 1, 2$ . Las trayectorias de los centros vienen ahora dadas por  $x_{C, I_1}^\pm(t) = x_{C, I_1}^\pm + v_{I_1}^{(1)} t$  para  $u_1$  y  $y_{C, I_2}^\pm(t) = y_{C, I_2}^\pm + v_{I_2}^{(2)} t$  para  $u_2$  donde

$$\begin{aligned} x_{C, I_1}^\pm &= -\frac{2}{(q_{I_1}^{(1)})_R} (\delta_{I_1}^{(1)\pm} + \Delta_{I_1}^{(1)\pm}) \\ y_{C, I_2}^\pm &= -\frac{2}{(q_{I_2}^{(2)})_R} (\delta_{I_2}^{(2)\pm} + \Delta_{I_2}^{(2)\pm}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde  $\delta_{I_i}^{(i)\pm}$  viene dada por (4.61a) y

$$\Delta_{I_1}^{(1)\pm} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{q_{I_1}^{(1)*} a(I_1^\pm \cup \{I_1\}, \phi)}{2(q_{I_1}^{(1)})_R a(I_1^\pm, \phi)} \right|; \Delta_{I_2}^{(2)\pm} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{q_{I_2}^{(2)*} a(\phi, I_2^\pm \cup \{I_2\})}{2(q_{I_2}^{(2)})_R a(\phi, I_2^\pm)} \right|. \quad (4.69)$$

Vemos entonces que  $u_1 + u_2$  es asintóticamente una función con  $N^{(1)} \cdot N^{(2)}$  nodos que se desplazan con velocidades  $\tilde{v}_{I_1 I_2} = (v_{I_1}^{(1)}, v_{I_2}^{(2)})$ . De (4.60), (4.62) y (4.68) vemos que el punto máximo del dromión- $(I_1, I_2)$  no coincide con la posición del nodo que se desplaza a igual velocidad. Además de (4.61b) y (4.63) sabemos que  $\Delta_{I_i}^{(i)\pm}$  depende de  $a_{I_m}^{ij}$  con  $i \neq j$  mientras que por (4.69)  $\Delta_{I_i}^{(i)\pm}$  sólo depende de  $a_{I_m}^{ii}$ , de este modo vemos que la dinámica de los dromiones no queda determinada por la dinámica de los potenciales y que mientras que el scattering de los dromiones es esencialmente bidimensional, el scattering para los potenciales es unidimensional. El hecho de que en [21, 22, 47] se llegue a que la dinámica de los potenciales determina la dinámica de la solución se debe a que las soluciones consideradas son un caso particular de las que hemos visto aquí. En efecto, es inmediato



comprobar que los resultados de [21,22,47] se obtienen a partir de los aquí expuestos tomando:

$$a_{jl}^{11} = a_{mm'}^{22} = 0, \quad l \neq l', \quad m \neq m'.$$

## 4.5 Tipos especiales de soluciones

Hasta ahora hemos estudiado las propiedades de la solución  $(N^{(1)}, N^{(2)})$  de la ecuación DS suponiendo valores generales de los parámetros  $q_i^{(1)}, a_{lm}^{ij}$  satisfaciendo (4.28), (4.29), (4.53) tales que  $d_i^\pm > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y  $d_3^\pm \neq d_1^\pm d_2^\pm$  para todos los dromiones asintóticos.

Podemos, no obstante, realizar ciertas elecciones de los parámetros que satisfaciendo también (4.28), (4.29) y (4.53) nos muestren soluciones diferentes de las estudiadas. Entre estas soluciones podemos ver que:

- i) Pueden tener lugar procesos de fisión y fusión de dromiones.
- ii) Pueden existir dromiones que no cambian su forma bajo interacción, e incluso soluciones asintóticamente formadas sólo por este tipo de dromiones.
- iii) Los dromiones pueden degenerar en kinks o en estructuras unidimensionales
- iv) Existen otras estructuras coherentes bidimensionales diferentes de las estudiadas hasta ahora.

Los parámetros de los dromiones asintóticos vienen dados por (4.57) en función de los símbolos  $a(I_1, I_2)$  definidos en (4.40c). Vamos a estudiar algunas de las propiedades de estos símbolos cuando imponemos ciertas condiciones a los parámetros  $a_{lm}^{ij}$ . Supongamos, en primer lugar que dados dos subconjuntos  $I_j \subset \{1, \dots, N^{(j)}\}$  ( $j = 1, 2$ ) exista algún entero  $l : 1 \leq l \leq N^{(1)}, l \notin I_1$  que verifique:

$$a_{ll'}^{1j} = 0 \quad \forall l' \in I_j \quad j = 1, 2. \quad (4.70)$$

Entonces de (4.40c) se sigue que

$$a(I_1 \cup \{l\}, I_2) = a_{ll}^{11} a(I_1, I_2). \quad (4.71)$$

Análogamente si existe un entero  $m : 1 \leq m \leq N^{(2)}, m \notin I_2$  tal que:

$$a_{mm'}^{2j} = 0 \quad \forall m' \in I_j \quad j = 1, 2. \quad (4.72)$$

tenemos que:

$$a(I_1, I_2 \cup \{m\}) = a_{mm}^{22} a(I_1, I_2). \quad (4.73)$$

Si se cumple que existen dos enteros  $l, m : 1 \leq l \leq N^{(1)}, 1 \leq m \leq N^{(2)} l \notin I_1; m \notin I_2$  que satisfacen ambas (4.70) y (4.72), entonces además de (4.71) y (4.73) de (4.40c) se deduce que:

$$a(I_1 \cup \{l\}, I_2 \cup \{m\}) = (a_{ll}^{11} a_{mm}^{22} - a_{lm}^{12} a_{ml}^{21}) a(I_1, I_2). \quad (4.74)$$

Volviendo de nuevo a la solución  $(N^{(1)}, N^{(2)})$  asumimos que hay dos enteros  $(l_1, l_2)$   $1 \leq l_i \leq N^{(i)}$  que satisfacen (4.70) y (4.72) respecto a los subconjuntos  $I_i^{\pm}$  ( $i = 1, 2$ ) definidos en (4.55). Es decir:

$$a_{l_i, l_j}^{ij} = 0 \quad \forall l_j' : l_j < l_j' \leq N^{(j)} \quad j = 1, 2. \quad (4.75)$$

Entonces de acuerdo con (4.57), (4.71), (4.73) y (4.74) los parámetros del dromión cuando  $t \rightarrow +\infty$  se reducen a:

$$d_i^+ = c_i^+ a_{l_i, l_i}^{ii} \quad (i = 1, 2); \quad d_3^+ = c_1^+ c_2^+ (a_{l_1, l_1}^{11} a_{l_2, l_2}^{22} - a_{l_1, l_2}^{12} a_{l_2, l_1}^{21}) \quad (4.76)$$

Análogamente si  $(l_1, l_2)$  satisface:

$$a_{l_i, l_i'}^{ij} = 0 \quad \forall l_j' : 1 \leq l_j' < l_j \quad j = 1, 2 \quad (4.77)$$

entonces

$$d_i^- = c_i^- a_{l_i, l_i}^{ii} \quad (i = 1, 2); \quad d_3^- = c_1^- c_2^- (a_{l_1, l_1}^{11} a_{l_2, l_2}^{22} - a_{l_1, l_2}^{12} a_{l_2, l_1}^{21}). \quad (4.78)$$

A partir de estos resultados, encontraremos ahora soluciones que describen procesos de interés en la dinámica de los dromiones.

### 4.5.1 Fusión y fisión de dromiones

Supongamos que elegimos los parámetros  $a_{l_i, l_i}^{ij}$  de modo que se satisfaga (4.75) para un par de índices fijos  $(l_1, l_2)$ . Si además para dicho par de índices hacemos  $a_{l_1, l_2}^{12} = 0$  entonces de (4.76) tenemos que  $d_3^+ = d_1^+ d_2^+$ . Esto quiere decir que la solución  $q$  se anula asintóticamente sobre el rayo  $(x + v_{l_1}^{(1)} t, y + v_{l_2}^{(2)} t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , luego el dromión no existe en dicho límite. Esto significa que podemos construir soluciones de la ecuación DS en las que el número final de dromiones es inferior al número inicial. Este tipo de soluciones describe procesos de fusión de dromiones.

Análogamente si los parámetros elegidos satisfacen (4.77) para un par  $(l_1, l_2)$  y además  $a_{l_1, l_2}^{12} = 0$  entonces de (4.78) tenemos que  $d_3^- = d_1^- d_2^-$ . En este caso el dromión  $(l_1, l_2)$  no existe en el límite  $t \rightarrow -\infty$  y el número final de dromiones es superior al número inicial. Este tipo de solución describe un proceso de fisión de dromiones [23].

Es importante notar que la condición  $a_{l_1, l_2}^{12} = 0$ , que implica que el dromión se anule en uno de los límites asintóticos, no afecta a los potenciales  $u_i$ .

Tomemos en particular la solución (2.1) y asumamos que  $a_{21}^{12} = 0$ . De lo visto hasta ahora sabemos que la forma asintótica de la solución implica dos velocidades  $\hat{v}_{11} = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) = (-q_{11}^{(1)}, q_{11}^{(2)})$  ( $l = 1, 2$ ). En el límite

$t \rightarrow -\infty$  la contribución de la solución en los rayos  $(x + v_1^{(1)}t, y + v_1^{(2)}t)$  para  $l = 1$  y 2 viene dada respectivamente por la acción sobre  $\tau_0(l, x)$  de los operadores de vértice

$$1 + A_{11}^{11} + A_{11}^{22} + (A_{11}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21}), \quad (4.79a)$$

y

$$\begin{aligned} & A_{11}^{11} + (A_{11}^{11}A_{22}^{11} + A_{12}^{11}A_{21}^{11}) + (A_{11}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21}) + \\ & (A_{11}^{11}A_{22}^{12}A_{11}^{22} + A_{12}^{11}A_{21}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21}A_{22}^{11}), \end{aligned} \quad (4.79b)$$

mientras que cuando  $t \rightarrow +\infty$  las contribuciones dominantes corresponden a

$$A_{22}^{11} + (A_{11}^{11}A_{22}^{11} + A_{12}^{11}A_{21}^{11}) + A_{22}^{12}A_{11}^{22} + (A_{11}^{11}A_{22}^{12}A_{11}^{22} + A_{12}^{11}A_{21}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21}A_{22}^{11}), \quad (4.80a)$$

y

$$1 + A_{22}^{11} + A_{11}^{22} + A_{22}^{12}A_{11}^{22}, \quad (4.80b)$$

respectivamente. De las ecuaciones (4.79) se deduce que cuando  $t \rightarrow -\infty$  la solución se descompone en dos dromiones con velocidades  $\tilde{v}_{11}$  y  $\tilde{v}_{21}$ . Además de (4.40), (4.57) y (4.46) encontramos que sus masas correspondientes son:

$$\begin{aligned} M_1^- &= 4 \log \frac{a_{11}^{11}a_{11}^{22} - a_{11}^{12}a_{11}^{21}}{a_{11}^{11}a_{11}^{22}}, \\ M_2^- &= 4 \log \frac{a_{11}^{11}(a_{22}^{11}a_{11}^{22} - a_{12}^{11}a_{11}^{21}) - a_{12}^{11}a_{11}^{22}a_{11}^{21} - a_{21}^{11}a_{12}^{11}a_{11}^{22}}{(a_{11}^{11}a_{22}^{11} - a_{12}^{11}a_{11}^{21})(a_{11}^{11}a_{11}^{22} - a_{11}^{12}a_{11}^{21})}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

De las ecuaciones (4.80) vemos que cuando  $t \rightarrow \infty$  la solución se reduce al dromión (1,1) ya que para el par de índices (2,1) tenemos que  $d_3^+ = d_1^+ d_2^+$  como habíamos previsto. En este caso la masa del dromión (1,1) viene dada por:

$$M_1^+ = 4 \log \frac{a_{22}^{11}a_{11}^{22} - a_{12}^{11}a_{11}^{21} - a_{11}^{11}a_{12}^{11}a_{11}^{22}}{a_{11}^{11}(a_{11}^{11}a_{22}^{11} - a_{12}^{11}a_{11}^{21})}. \quad (4.82)$$

Es decir, la solución que estamos estudiando representa un proceso de fusión de dromiones. De (4.81) y (4.82) es inmediato comprobar que se conserva la masa total.

Análogamente si tomamos  $a_{11}^{22} = 0$  en lugar de  $a_{21}^{22} = 0$  encontramos que el dromión (1,1) se anula en el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ . Tiene entonces lugar un proceso de fisión de un dromión en dos dromiones finales.

El proceso de fusión es ilustrado en la figura 4.4 donde hemos representado la función  $|q|^2$  correspondiente a la elección de parámetros:

$$q_1^{(1)} = 1 - 2i, \quad q_2^{(1)} = 1 - i, \quad q_1^{(2)} = 2 + 2i,$$

$$a_{11}^{11} = \frac{4}{5}(-1 + 2i) \quad , \quad a_{22}^{11} = -5 + 5i \quad , \quad a_{11}^{22} = -1 - i,$$

$$a_{12}^{11} = -1 + 3i \quad , \quad a_{11}^{12} = 1,$$

que determinan una función  $r_1$  de la forma:

$$\begin{aligned} r_1 = & 1 + 2f^2(x - 2t) + 5f^2(x - t) + f^4(y - 2t) \\ & + 4f(x - 2t)f(x - t)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3t}{4}\right) + f^2(x - 2t)f^2(x - t) \\ & + 3f^2(x - 2t)f^4(y - 2t) + 5f^2(x - t)f^4(y - 2t) \\ & + 4f(x - 2t)f(x - t)f^4(y - 2t)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3t}{4}\right) \\ & 2f^2(x - t)f^2(x - 2t)f^4(y - 2t) \end{aligned}$$

donde  $f(x) = \exp(\frac{x}{2})$ .



a)  $t = -20$



b)  $t = -6$



c)  $t = -4$



d)  $t = -2$

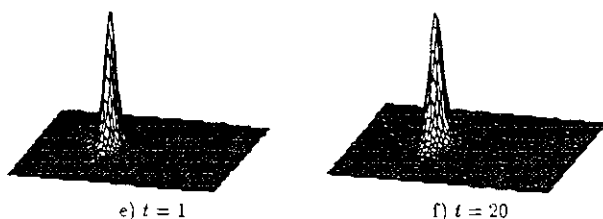


Figura 4.4: fusión

### 4.5.2 Dromiones que no cambian de forma bajo interacción

Consideremos el caso en el que (4.75) y (4.77) se verifican simultáneamente, entonces los parámetros del dromión  $(l_1, l_2)$  en los límites asintóticos  $t \rightarrow \pm\infty$  están dados por (4.76) y (4.78) respectivamente, de donde puede verse que el dromión tiene la misma forma en ambos límites asintóticos. En particular de (4.46), (4.76) y (4.78) encontramos que:

$$M_{l_1 l_2}^+ = M_{l_1 l_2}^- = 2 \log \frac{a_{l_1 l_1}^{11} a_{l_2 l_2}^{22} - a_{l_1 l_2}^{12} a_{l_2 l_1}^{21}}{a_{l_1 l_1}^{11} a_{l_2 l_2}^{22}}. \quad (4.83)$$

Además en este caso, de las expresiones (4.61b), (4.63) y (4.69) vemos que:

$$\Delta_{l_1 l_2}^{(i)\pm} = \Delta_{l_i}^{(i)\pm} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{q_{l_i}^{(i)*} a_{l_i l_i}^{ii}}{2(q_{l_i}^{(i)})_R} \right| \quad (4.84)$$

y como consecuencia la posición del centro del dromión y la del nodo correspondiente están relacionadas por:

$$\begin{aligned} x_{C, l_1}^{\pm} &= x_{l_1 l_2}^{\pm} + \frac{1}{4(q_{l_1}^{(1)})_R} M_{l_1 l_2} \\ y_{C, l_2}^{\pm} &= y_{l_1 l_2}^{\pm} + \frac{1}{4(q_{l_2}^{(2)})_R} M_{l_1 l_2} \end{aligned} \quad (4.85)$$

donde  $M_{l_1 l_2} = M_{l_1 l_2}^+ = M_{l_1 l_2}^-$  es la masa del dromión dada por (4.83). Por lo tanto el único efecto sobre el dromión debido a la interacción es un

desplazamiento dado por:

$$\begin{aligned} x_{l_1 l_2}^+ - x_{l_1 l_2}^- &= x_{C, l_1}^+ - x_{C, l_1}^- = -\frac{2}{(\epsilon_{l_1}^{(1)})_R} (\delta_{l_1}^{(1)+} - \delta_{l_1}^{(1)-}) \\ y_{l_1 l_2}^+ - y_{l_1 l_2}^- &= y_{C, l_2}^+ - y_{C, l_2}^- = -\frac{2}{(\epsilon_{l_2}^{(2)})_R} (\delta_{l_2}^{(2)+} - \delta_{l_2}^{(2)-}) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Supongamos ahora que hemos tomado los parámetros  $a_{lm}^{ij}$  de modo que verifiquen

$$a_{lm}^{ij} = 0, \quad l \neq m \quad 1 \leq l \leq N^{(i)}, \quad 1 \leq m \leq N^{(j)} \quad (4.87)$$

En este caso es evidente que (4.75) y (4.77) se verifican para todos los pares  $(l_1, l_2)$ . Además como  $a_{l_1 l_2}^{12} = 0$  siempre que  $l_1 \neq l_2$  se verifica  $d_3^\pm = d_1^\pm d_2^\pm$  para todos los dromiones con  $l_1 \neq l_2$  luego no existen dromiones con velocidades  $\tilde{v}_{l_1 l_2}$  para  $l_1 \neq l_2$ . Es decir la solución correspondiente a (4.87) representa  $\min(N^{(1)}, N^{(2)})$  dromiones que se mueven con velocidades  $\tilde{v}_l$   $1 \leq l \leq \min(N^{(1)}, N^{(2)})$  en ambos límites asintóticos y que conservan su forma bajo interacción [2,3,4].

El ejemplo más sencillo lo tenemos de nuevo en la solución (2,1). La reducción (4.87) sobre (4.27) para  $N^{(1)} = 2, N^{(2)} = 1$  lo convierte en:

$$\begin{aligned} g = \exp \{ & a_{11}^{11} \psi^{(1)}(q_1^{(1)}) \psi^{(1)*}(-q_1^{(1)*}) + a_{22}^{11} \psi^{(1)}(q_2^{(1)}) \psi^{(1)*}(-q_2^{(1)*}) + \\ & a_{11}^{12} \psi^{(1)}(q_1^{(1)}) \psi^{(2)*}(-q_1^{(2)*}) + a_{11}^{21} \psi^{(2)}(q_1^{(2)}) \psi^{(1)*}(-q_1^{(1)*}) + \\ & a_{11}^{22} \psi^{(2)}(q_1^{(2)}) \psi^{(2)*}(-q_1^{(2)*}) \}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

En principio la solución implicaría dos velocidades  $\tilde{v}_1 = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) = (-q_1^{(1)})_I, (q_1^{(2)})_I$  ( $l = 1, 2$ ). En el límite  $t \rightarrow -\infty$  la contribución de la solución sobre el rayo  $(x + v_1^{(1)}t, y + v_1^{(2)}t)$  para  $l = 1, 2$  viene dada respectivamente por la acción sobre la solución trivial de los operadores de vértice:

$$1 + A_{11}^{11} + A_{11}^{22} + (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}), \quad (4.89)$$

$$A_{11}^{11} + A_{11}^{11} A_{11}^{22} + (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}) + A_{11}^{22} (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}),$$

mientras que cuando  $t \rightarrow \infty$  dichas contribuciones quedan determinadas por

$$\begin{aligned} A_{11}^{11} + A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{22} (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}), \\ 1 + A_{11}^{11} + A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

De (4.89) y (4.90) es evidente que para el dromión (2,1) se satisface  $d_3^\pm = d_1^\pm d_2^\pm$ , es decir no existe dicho dromión en ninguno de los límites asintóticos.

Para el dromión (1,1) de (4.89), (4.90) (4.40) y (4.57) es inmediato que:

$$d_1^\pm = -\frac{a_{11}^{11} q_1^{(1)*}}{2(q_1^{(1)})_R} \left| \frac{q_1^{(1)} - q_2^{(1)}}{q_1^{(1)} + q_2^{(1)*}} \right|^{2s^\pm}; \quad d_2^\pm = -\frac{a_{11}^{22} q_1^{(2)*}}{2(q_1^{(2)})_R} \quad (4.91)$$

$$d_3^\pm = -\frac{(a_{11}^{11} a_{11}^{22} - a_{11}^{12} a_{11}^{21}) q_1^{(1)*} q_1^{(2)*}}{4(q_1^{(1)})_R (q_1^{(2)})_R} \left| \frac{q_1^{(1)} - q_2^{(1)}}{q_1^{(1)} + q_2^{(1)*}} \right|^{2s^\pm}$$

donde  $s^- = 0$  y  $s^+ = 1$ .

Vemos entonces que la solución que estamos estudiando es asintóticamente un dromión que no cambia de forma. Su masa en  $t \rightarrow \pm\infty$  viene dada por

$$M_1^\pm = 4 \log \frac{a_{11}^{11} a_{11}^{22} - a_{11}^{12} a_{11}^{21}}{a_{11}^{11} a_{11}^{22}} \quad (4.92)$$

y de (4.86) encontramos

$$\begin{aligned} x_{11}^+ - x_{11}^- &= -\frac{2}{(q_1^{(1)})_R} \log \left| \frac{q_1^{(1)} - q_2^{(1)}}{q_1^{(1)} + q_2^{(1)*}} \right| \\ y_{11}^+ &= y_{11}^- \end{aligned} \quad (4.93)$$

De (4.88) podemos ver que la función  $\tau_1$  viene dada por la acción sobre la solución trivial de

$$\begin{aligned} &1 + A_{11}^{11} + A_{22}^{11} + A_{11}^{22} + A_{11}^{11} A_{22}^{11} + (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}) + \\ &A_{12}^{11} A_{11}^{22} + A_{12}^{12} (A_{11}^{11} A_{11}^{22} + A_{11}^{12} A_{11}^{21}), \end{aligned} \quad (4.94)$$

luego la masa total puede calcularse fácilmente como

$$M = 4 \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \partial_x \partial_y \log \tau_1 = 4 \log \frac{a_{11}^{11} a_{11}^{22} - a_{11}^{12} a_{11}^{21}}{a_{11}^{11} a_{11}^{22}}$$

que de (4.92) vemos que coincide con la masa del dromión. La interacción que sufre el dromión en esta solución es debida sólo a la interacción con los potenciales.

En la figura 4.5 representamos la función  $|q|^2$  correspondiente a la elección de los parámetros

$$q_1^{(1)} = 1 - \frac{i}{500}, \quad q_2^{(1)} = 1 - \frac{i}{1000}, \quad q_1^{(2)} = 2 + \frac{i}{500},$$

$$b_1^1 = 0.05, \quad b_2^1 = 0.1, \quad b_1^2 = 0.04, \quad c_{11} = 20$$

donde hemos definido

$$b_{l_i}^i = -\frac{a_{l_i, l_i}^{ii} q_{l_i}^{(i)*}}{2q_{l_i, R}^{(i)}}, \quad i = 1, 2; \quad l_1 = 1, 2; \quad l_2 = 1 \quad (4.95)$$

$$c_{1,1} = -\frac{a_{l_1, l_1}^{12} a_{l_1, l_1}^{21} q_{l_1}^{(1)*} q_{l_1}^{(2)*}}{4q_{l_1, R}^{(1)} q_{l_1, R}^{(2)}}.$$



a)  $t = -4000$



b)  $t = 1000$



c)  $t = 2500$



d)  $t = 5500$



e)  $t = 7000$



f)  $t = 12000$

Figura 4.5



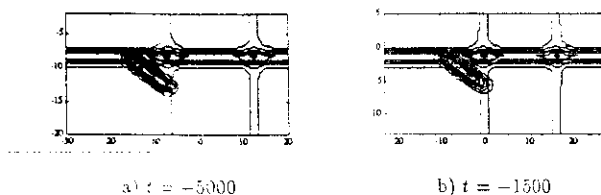
La función  $\tau_1$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & 1 + 0.05f\left(x - \frac{t}{500}\right) + 0.1f\left(x - \frac{t}{1000}\right) + 0.04f^2\left(y - \frac{t}{500}\right) \\ & + 20(1 + 10^{-4})f\left(x - \frac{t}{500}\right)f^2\left(y - \frac{t}{500}\right) + \\ & \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 4 \cdot 10^6}f\left(x - \frac{t}{500}\right)f\left(x - \frac{t}{1000}\right) \\ & 4 \cdot 10^{-3}f\left(x - \frac{t}{1000}\right)f^2\left(y - \frac{t}{500}\right) + \\ & \frac{2(1 + 10^{-4})}{1 + 4 \cdot 10^6}f\left(x - \frac{t}{500}\right)f\left(x - \frac{t}{1000}\right)f^2\left(y - \frac{t}{500}\right) \end{aligned} \quad (4.96)$$

donde  $f(x) = \exp(x)$ . De (4.96) es inmediato obtener para los potenciales

$$\begin{aligned} u_1(x, t) + u_2(y, t) = & 2\partial_x^2 \log\left\{1 + 0.05f\left(x - \frac{t}{500}\right) + 0.1f\left(x - \frac{t}{1000}\right) + \right. \\ & \left. \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 4 \cdot 10^6}f\left(x - \frac{t}{500}\right)f\left(x - \frac{t}{1000}\right)\right\} + \\ & 2\partial_y^2 \log\left\{1 + 0.04f^2\left(y - \frac{t}{500}\right)\right\}. \end{aligned}$$

En la figura 4.6 representamos las curvas de nivel de  $u_1 + u_2$  junto con las de  $|q|^2$ , puede verse de este modo como tiene lugar la interacción entre el dromión y los potenciales. Es importante notar en la figura 4.5 como la interacción del dromión con el potencial tiene lugar mediante la aparición de un nuevo dromion que toma la forma del dromión inicial haciendo que este desaparezca.



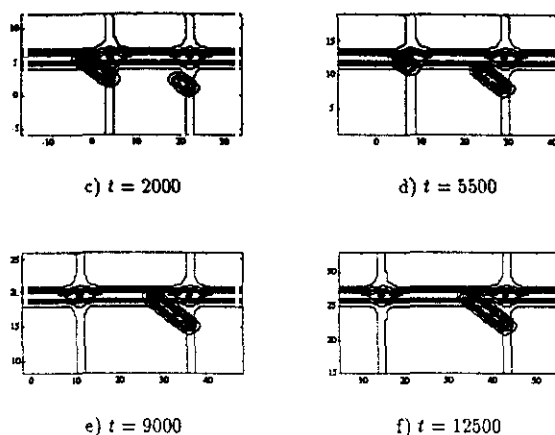


Figura 4.6

### 4.5.3 Procesos de interacción de kinks

Al estudiar las estructuras coherentes encontramos que si hacemos  $a_{11}^{22}$  en la solución (1, 1), esta solución toma la forma de un kink. Queremos ahora considerar soluciones en las que aparezcan estos tipos de estructuras en procesos de interacción. La condición  $a_{11}^{22}$  que convierte el dromión en un kink sugiere partir del elemento del grupo  $Gl(2\mathbb{C})$  (4.27) que satisface (4.28), (4.29) y (4.53) tomando

$$a_{lm}^{22} = 0; \quad \forall l, m \in \{1, \dots, N^{(2)}\} \quad (4.97)$$

de este modo la dinámica descrita anteriormente sigue siendo válida, pero las estructuras coherentes asintóticas pueden ahora degenerar en kinks o en estructuras unidimensionales e incluso pueden no existir. Para ver cuando estamos en estos casos estudiamos los símbolos  $a(I_1, I_2)$  bajo la condición (4.97). De (4.40c) tenemos que la única partición de  $I_2$  que contribuye a  $a(I_1, I_2)$  es

$$I_{21} = I_2, \quad I_{22} = \phi \quad (4.98)$$

entonces de (4.36) debe satisfacerse  $I_2 = \sigma_{12}(I_{12})$  luego debemos tomar  $I_{12}$  tal que  $n(I_{12}) = n(I_2)$  y como  $I_{12} \subset I_1$ , para que sea posible tomar la partición (4.98) el número de elementos de  $I_1$  debe ser mayor o igual al número de elementos de  $I_2$ . Es decir:

$$n(I_1) < n(I_2) \Rightarrow a(I_1, I_2) = 0. \quad (4.99)$$

Consideramos entonces la solución generada por el elemento de  $Gl(2\infty)$  (4.27) con la condición (4.97). Empezaremos por estudiar el comportamiento asintótico de la solución cuando  $t \rightarrow -\infty$  sobre los rayos

$$(x - (q_i^{(1)})_l t, y + (q_i^{(2)})_l t) \quad (4.100)$$

distinguiendo los siguientes casos

i)  $l_2 > l_1 + 1$ . En este caso de lo expuesto anteriormente se deduce que el término dado en (4.56) como término dominante se anula. Para encontrar el término dominante hay que aumentar el número de elementos de  $I_1$  o disminuir el número de elementos de  $I_2$  dependiendo de los valores de  $q_i^{(1)}$ . En general, lo encontraremos entre los términos  $A(I_l^-, I_l^-, I_l^-, I_l^-)$  donde  $l_1 + 1 \leq l \leq \min\{l_2, N^{(1)} + 1\}$ . Si de estos términos solo existe uno que sea dominante se sigue que  $|q| \rightarrow 0$  en el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ . Pero puede comprobarse que  $A(I_l^-, I_l^-, I_l^-, I_l^-)$  y  $A(I_{l'}^-, I_{l'}^-, I_{l'}^-, I_{l'}^-)$  son del mismo orden si se verifica

$$\sum_{j=l}^{l'-1} \{q_{jR}^{(1)}(q_{jI}^{(1)} - q_{l_1I}^{(1)}) + q_{jR}^{(2)}(q_{l_2I}^{(2)} - q_{jI}^{(2)})\} = 0 \quad (4.101)$$

$$l_1 + 1 \leq l < l' \leq \min\{l_2, N^{(1)} + 1\}$$

luego en este caso puede existir más de una contribución al término dominante y  $|q|$  no se anula sobre el rayo (4.100) en el límite  $t \rightarrow -\infty$ . En particular si solo se satisface (4.101) para dos índices  $l$  y  $l'$ ,  $|q|$  toma la forma de una estructura unidimensional.

ii)  $l_2 = l_1 + 1$ . En este caso de (4.56) y (4.99) se deduce que el término dominante viene dado por  $A(I_{l_1}^-, I_{l_1}^-, I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1+1}^-, I_{l_1+1}^-)$  luego  $|q| \rightarrow 0$  sobre (4.100) en el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ .

iii)  $l_2 = l_1$  De nuevo de (4.56) y (4.99) el término dominante viene dado ahora por

$$A(I_{l_1}^-, I_{l_1}^-, I_{l_1}^-, I_{l_1}^-) + A(I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^-, I_{l_1}^-) + \\ A(I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^- \cup \{l_1\}, I_{l_1}^- \cup \{l_1\})$$

y la solución toma sobre (4.100) la forma de un kink en el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ .

iv)  $l_2 < l_1$ . En este caso ninguna de las contribuciones al término dominante dadas en (4.56) se anulan luego sobre el rayo (4.100) la solución toma la forma de un dromión en el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ .

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento de la solución sobre el rayo (4.100) cuando consideramos el límite asintótico  $t \rightarrow \infty$ . Para considerar las contribuciones al término dominante debemos distinguir los casos:

i)  $l_2 < N^{(2)} - N^{(1)} + l_1 - 1$ . De (4.99) vemos que (4.56) se anula. El término dominante puede verse que está ahora entre  $A(I_l^+, I_l^+, I_{N^{(2)}-N^{(1)}+l}^+)$ ,  $I_{N^{(2)}-N^{(1)}+l}^+$  donde  $\max\{0, N^{(1)} - N^{(2)} + l_2\} \leq l \leq l_1 - 1$ . De nuevo si el término dominante es único  $|q| \rightarrow 0$  sobre (4.100) cuando  $t \rightarrow \infty$ ; pero si se verifica

$$\sum_{j=l+1}^{l'} \{q_{jR}^{(1)}(q_{jI}^{(1)} - q_{l_1I}^{(1)}) + q_{N^{(2)}-N^{(1)}+jR}^{(2)}(q_{l_2I}^{(2)} - q_{N^{(2)}-N^{(1)}+jI}^{(2)})\} = 0$$

$$\max\{0, N^{(1)} - N^{(2)} + l_2\} \leq l < l' \leq l_1 - 1 \quad (4.102)$$

puede existir más de una contribución al término dominante y entonces  $|q|$  sobre (4.100) en el límite  $t \rightarrow \infty$  no se anula.

ii)  $l_2 = N^{(2)} - N^{(1)} + l_1 - 1$ . Entonces el término dominante viene dado por  $A(I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_2}^+, I_{l_2}^+)$  y  $|q| \rightarrow 0$  en el límite  $t \rightarrow \infty$  sobre (4.100)

iii)  $l_2 = N^{(2)} - N^{(1)} + l_1$ . En este caso el término dominante es

$$A(I_{l_1}^+, I_{l_1}^+, I_{l_2}^+, I_{l_2}^+) + A(I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_2}^+, I_{l_2}^+) +$$

$$A(I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_1}^+ \cup \{l_1\}, I_{l_2}^+ \cup \{l_2\}, I_{l_2}^+ \cup \{l_2\})$$

y  $|q|$  sobre (4.100) tiene la forma de un kink cuando  $t \rightarrow \infty$ .

iv)  $l_2 > N^{(2)} - N^{(1)} + l_1$ . De nuevo ninguna de las contribuciones al término dominante (4.56) se anula luego la solución sobre (4.100) toma la forma de un dromión cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Resumiendo lo visto hasta ahora hemos encontrado soluciones en las que aparecen kinks y dromiones. El número de kinks viene dado por  $\min\{N^{(1)}, N^{(2)}\}$  y en general no conservan sus velocidades pasando de:

$$(v_l^{(1)}, v_l^{(2)}), \quad 1 \leq l \leq \min\{N^{(1)}, N^{(2)}\} \text{ cuando } t \rightarrow -\infty$$

a

$$(v_l^{(1)}, v_{N^{(2)}-N^{(1)}+l}^{(2)}), \quad \max\{1, N^{(1)} - N^{(2)} + 1\} \leq l \leq N^{(1)}$$

cuando  $t \rightarrow \infty$

sólo en el caso particular  $N^{(1)} = N^{(2)}$  los kinks conservan sus velocidades.

Los dromiones corresponden a las velocidades:

$$(v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}), \quad i_1 = 1, \dots, N^{(1)}, \quad i_2 = 1, \dots, \min\{N^{(2)}, i_1 - 1\}$$

cuando  $t \rightarrow -\infty$

y

$$(v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}), \quad i_1 = 1, \dots, N^{(1)}, \quad i_2 = \max\{1, N^{(2)} - N^{(1)} + i_1 + 1\} \dots N^{(2)}$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Vemos también que el número de dromiones se conserva; en el caso  $N^{(1)} \leq N^{(2)}$  viene dado por  $\frac{1}{2}N^{(1)}(N^{(1)} - 1)$  y todos ellos cambian de velocidad bajo interacción. Si  $N^{(1)} > N^{(2)}$  tenemos  $\frac{1}{2}N^{(2)}(2N^{(1)} - N^{(2)} - 1)$  dromiones de los que  $\frac{1}{2}N^{(2)}(N^{(2)} + 1)$  cambian de velocidad y  $N^{(2)}(N^{(1)} - N^{(2)} - 1)$  conservan su velocidad bajo interacción. Estos últimos son los que corresponden a las velocidades

$$(v_{i_1}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}), \quad i_2 = 1, \dots, N^{(2)}, \quad i_1 = i_2 + 1, \dots, N^{(1)} - N^{(2)} + i_2 - 1.$$

Pueden también aparecer otras estructuras coherentes en alguno de los límites asintóticos si se verifican las condiciones (4.101) ó (4.102).

#### 4.5.4 Otras estructuras coherentes bidimensionales

Analizaremos ahora otros tipos de soluciones diferentes al dromión y al kink que se mueven rigidamente con una velocidad característica. Con este fin vamos a proceder de dos modos diferentes encontrando así diferentes estructuras coherentes soluciones de la ecuación DS [41].

En primer lugar partimos de la solución generada por el elemento del grupo  $Gl(2\infty)$  dado por (4.27), (4.28) y (4.29) con  $N^{(1)} = 2$ ,  $N^{(2)} = 1$  y donde hemos tomado  $(q_2^{(1)})_I = (q_1^{(1)})_I$  para que exista una sola velocidad dada por  $(- (q_1^{(1)})_I, (q_1^{(2)})_I)$ . De (4.32) vemos que en el desarrollo de  $g$  nos aparece el término  $A_{12}^{11}$ , la dependencia en las variables  $(x, y, t)$  de dicho término viene dada por:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(q_{1R}^{(1)} + q_{2R}^{(1)})x + \frac{1}{2}i[(q_{1R}^{(1)} + q_{2R}^{(1)})q_{1I}^{(1)} - \frac{i}{2}(q_{1R}^{(1)^2} - q_{2R}^{(1)^2})]t\right\}$$

luego la presencia de este término hace que la solución que consideramos no sea una estructura coherente excepto en el caso trivial  $q_{1R}^{(1)} = q_{2R}^{(1)}$ , en el que la solución se reduce a un dromión. Para evitarlo tenemos que tomar  $a_{12}^{11} = 0$ . Pero esta misma dependencia en las variables, multiplicada por el factor  $\exp[q_{1R}^{(2)}(y - q_{1I}^{(2)}t)]$  la tenemos en el término  $A_{11}^{12}A_{12}^{11}$ , luego de nuevo es

necesario hacer  $a_{11}^{12} = 0$  ó  $a_{11}^{12} = 0$ , tomamos la última posibilidad. Entonces el elemento del grupo  $Gl(2\mathbb{C})$  que estamos considerando viene dado por:

$$g = \exp\{a_{11}^{11}\psi^{(1)}(q_1^{(1)})\psi^{(1)*}(-q_1^{(1)*}) + a_{22}^{11}\psi^{(1)}(q_2^{(1)})\psi^{(1)*}(-q_2^{(1)*}) + a_{11}^{12}\psi^{(1)}(q_1^{(1)})\psi^{(2)*}(-q_1^{(2)*}) + a_{11}^{21}\psi^{(2)}(q_1^{(2)})\psi^{(1)*}(-q_1^{(1)*}) + a_{11}^{22}\psi^{(1)}(q_2^{(2)})\psi^{(2)*}(-q_2^{(2)*})\} \quad (4.103)$$

donde  $(q_1^{(1)})_I = (q_2^{(1)})_I$ . Desarrollando la exponencial vemos que la solución que estamos buscando viene dada por la acción del operador de vértice

$$1 + A_{11}^{11} + A_{22}^{11} + A_{11}^{22} + A_{11}^{11}A_{22}^{11} + (A_{11}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21}) + A_{11}^{12}A_{11}^{22} + A_{11}^{22}(A_{11}^{11}A_{11}^{22} + A_{11}^{12}A_{11}^{21})$$

En la figura 4.7 representamos  $|q|^2$  para la elección de parámetros

$$q_1^{(1)} = \frac{1}{2} - i, \quad q_2^{(1)} = 1 - i, \quad q_1^{(2)} \approx \frac{1}{2} + i \quad (4.104)$$

$$b_1^1 = b_1^2 = 1, \quad b_2^1 = 0.5, \quad c_{11} \approx 2$$

donde  $b_i^j, c_{11}$  están definidos como en (4.95) y la función  $\tau_1$  que determina la solución es de la forma

$$\tau_1(x, y, t) = 1 + f(x-t) + \frac{1}{2}f^2(x-t) + f(y-t) + \frac{1}{18}f^3(x-t) + 3f(x-t)f(y-t) + \frac{1}{2}f^2(x-t)f(y-t) + \frac{1}{6}f^3(x-t)f(y-t)$$

siendo  $f(x) \approx \exp(\frac{x}{2})$ . Esta solución representa un estado ligado de dos dromiones.

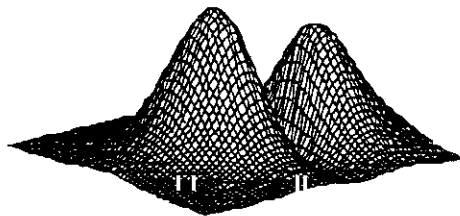


Figura 4.7

Si ahora sobre el elemento (4.103) hacemos  $a_{11}^{22} = 0$  ( $b_1^2 = 0$ ) encontramos una estructura coherente, localizada excepto en una dirección, pero diferente al kink. Eligiendo el resto de los parámetros igual que en (4.104) la función  $\tau_1$  viene dada por:

$$\begin{aligned}\tau_1(x, y, t) = & 1 + f(x-t) + \frac{1}{2}f^2(x-t) + \frac{1}{18}f^3(x-t) + \\ & 2f(x-t)f(y-t) + \frac{1}{9}f^3(x-t)f(y-t)\end{aligned}$$

y  $|q|^2$  queda representado en la figura 4.8. En este caso la solución es un estado ligado dromión-kink.

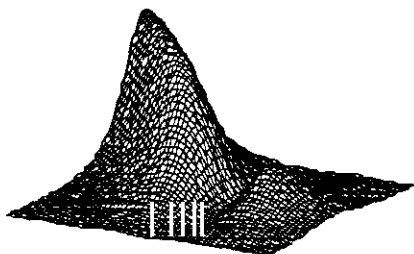


Figura 4.8

Podríamos también partir del elemento de  $Gl(2\infty)$  de la forma:

$$\begin{aligned}g = & \exp\{a^{11}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*) + a^{12}\psi^{(1)}(q')\psi^{(2)*}(-p'^*) + \\ & a^{21}\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*) + a^{22}\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*)\}\end{aligned}\quad (4.105)$$

que de acuerdo con (4.26) genera soluciones de la ecuación DS si se verifica

$$a^{11}q^*, a^{22}p^* \in \mathbf{R}, \quad -(a^{12}p'^*)^* = a^{21}q'^*. \quad (4.106)$$

La exponencial puede desarrollarse y obtenemos que la solución viene dada

por la acción sobre la solución trivial del operador de vértice

$$\begin{aligned} & 1 + a^{11}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*) + a^{22}\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*) + \\ & a^{11}a^{22}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*)\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*) + \\ & a^{12}a^{21}\psi^{(1)}(q')\psi^{(2)*}(-p'^*)\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*) + \\ & a^{11}a^{12}a^{21}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*)\psi^{(1)}(q')\psi^{(2)*}(-p'^*)\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*) + \\ & a^{12}a^{21}a^{22}\psi^{(1)}(q')\psi^{(2)*}(-p'^*)\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*)\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*) + \\ & a^{11}a^{12}a^{21}a^{22}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*)\psi^{(1)}(q')\psi^{(2)*}(-p'^*)\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*) \cdot \\ & \cdot \psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*) \end{aligned}$$

la dependencia en las variables  $x, y, t$  de los términos  $a^{11}\psi^{(1)}(q)\psi^{(1)*}(-q^*)$  y  $a^{22}\psi^{(2)}(p)\psi^{(2)*}(-p^*)$  viene dada respectivamente por  $\exp[q_R(x + q_I t)]$  y  $\exp[p_R(y - p_I t)]$  luego la velocidad debe ser  $\tilde{v} = (-q_I, p_I)$ . Si queremos ahora que la solución sea una estructura coherente que se desplace con velocidad  $(-q_I, p_I)$ , al realizar el cambio

$$x \rightarrow x - q_I t, y \rightarrow y + p_I t \quad (4.107)$$

la solución no debe depender de la variable temporal. Consideramos ahora el término  $a^{12}a^{21}\psi^{(1)}(q')\psi^{(1)*}(-p'^*)\psi^{(2)}(p')\psi^{(1)*}(-q'^*)$ , su dependencia en las variables  $x, y, t$  viene dada por:

$$\exp[q'_R(x + q'_I t) + p'_R(y - p'_I t)]$$

y realizando el cambio (4.107) encontramos

$$\exp\{q'_R x + p'_R y + [q'_R(q'_I - q_I) + p'_R(p_I - p'_I)]t\}$$

luego tenemos que imponer

$$q'_R(q_I - q'_I) = p'_R(p_I - p'_I). \quad (4.108)$$

Bajo esta condición es inmediato comprobar que la solución determinada por la realización del elemento  $GI(2\infty)$  dado por (4.105) es una estructura coherente. En la figura 4.9 representamos  $|q|^2$  para dicha solución habiendo realizado la elección de parámetros

$$\begin{aligned} q &= 2 + \frac{i}{2}, \quad q' = 2 + \frac{i}{3}, \quad p = \frac{1}{2} + \frac{i}{6}, \quad p' = 1 - \frac{i}{6} \\ a^{11} &= -\frac{8}{17}(4 + i), \quad a^{22} = -\frac{3}{5}(3 + i), \quad a^{12} = \frac{288}{37} \end{aligned}$$

y en este caso la función  $\tau_1$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \tau_1(x, y, t) &= 1 + f^2(x + \frac{t}{2}) + f^{\frac{1}{2}}(y - \frac{t}{6}) + f^2(x + \frac{t}{2})f^{\frac{1}{2}}(y - \frac{t}{6}) + \\ & f^2(x + \frac{t}{2})f(y - \frac{t}{6}) + \frac{1}{577}f^4(x + \frac{t}{2})f(y - \frac{t}{6}) + \\ & \frac{13}{85}f^2(x + \frac{t}{2})f^{\frac{1}{2}}(y - \frac{t}{6}) + \frac{13}{49045}f^4(x + \frac{t}{2})f^{\frac{1}{2}}(y - \frac{t}{6}) \end{aligned}$$



donde ahora  $f(x) = \exp(x)$  y la solución es un estado ligado kink-kink.

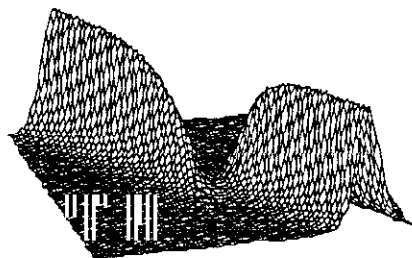


Figura 4.9

Una estructura similar ha sido encontrada experimentalmente en ondas superficiales de un fluido poco profundo sometido a una perturbación [18].

## Capítulo 5

# Estructuras coherentes localizadas en dimensión arbitraria

### 5.1 Soluciones localizadas de la jerarquía KP en $N$ componentes

En los capítulos precedentes hemos encontrado estructuras coherentes localizadas en  $(1+1)$  y en  $(2+1)$  dimensiones. Queremos ahora generalizar estos resultados encontrando una estructura localizada en  $(N+1)$  dimensiones, solución de la jerarquía KP en  $N$  componentes y estudiando el comportamiento de esta estructura en soluciones en las que interacciona con otras estructuras similares [43]. De lo visto en el capítulo 2 sabemos que podemos encontrar soluciones de la jerarquía de KP en  $N$  componentes mediante la acción de las realizaciones en términos de operadores de vértice de los elementos  $g \in GL(N\infty)$  sobre la solución trivial:

$$\tau_m(l, x) = \delta_{l_1 m_1} \cdots \delta_{l_N m_N}. \quad (5.1)$$

En este capítulo vamos a centrarnos en las soluciones obtenidas al actuar sobre (5.1) para  $m_i = 0$ ;  $i = 1, \dots, N$  con elementos  $g \in GL(N\infty)$  de la forma

$$g = \exp \left[ \sum_{i,j=1,2}^N \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_j} a_{nm}^{ij} \psi^{(i)}(q_n^{(i)}) \psi^{(j)*}(-q_m^{(j)*}) \right] \quad (5.2)$$

donde  $q_n^{(i)}$   $i = 1 \dots N$   $n = 1 \dots N_i$  son puntos en la circunferencia  $\gamma$  con  $\text{Re} q_n^{(i)} > 0$  y  $q_n^{(i)} \neq q_m^{(i)}$  si  $n \neq m$  y  $a_{nm}^{(i)}$  son parámetros complejos, en principio arbitrarios.

De las relaciones canónicas de anticonmutación para los campos  $\psi^{(i)}(q_n^{(i)})$ ,  $\psi^{(j)*}(-q_m^{(j)*})$ , vemos que realizando el desarrollo de la exponencial en (5.2) podemos escribir  $g$  como:

$$g = \prod_{i,j=1}^N \prod_{n=1}^{N_i} \prod_{m=1}^{N_j} \left[ 1 + a_{nm}^{(i)} \psi^{(i)}(q_n^{(i)}) \psi^{(j)*}(-q_m^{(j)*}) \right].$$

Haciendo actuar ahora  $g$  sobre (5.1) y agrupando los términos que tienen igual dependencia en las variables  $x_n^{(i)}$  encontramos que  $\tau(l, x)$  puede escribirse de la forma

$$\tau(l, x) = \sum a(I, I^*; x) \tau_0(l, x) \quad (5.3)$$

donde

$$a(I, I^*; x) = c(I, I^*) \exp \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{n \in I_i} \xi(q_n^{(i)}, x^{(i)}) - \sum_{m \in I_i^*} \xi(-q_m^{(i)*}, x^{(i)}) \right) \right] \cdot \prod_{i=1}^N T_{I_i}^{n_i^* - n_i} \quad (5.4)$$

siendo  $I = \{I_1, \dots, I_N\}$ ,  $I^* = \{I_1^*, \dots, I_N^*\}$  con  $I_i$ ,  $I_i^*$  subconjuntos arbitrarios de  $\{1, \dots, N_i\}$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $n_i$  el número de elementos de  $I_i$ ,  $n_i^*$  el número de elementos de  $I_i^*$  y la suma en (5.3) extendida a todos los posibles conjuntos  $I$ ,  $I^*$ . Si tomamos ahora el caso particular  $l = 0$ , al hacer actuar los operadores  $a(I, I^*; x)$  sobre  $\tau_0(l, x)$  y evaluarlo en  $l = 0$  de (5.1) y (5.4) tenemos que para que la contribución de  $a(I, I^*; x)$  a  $\tau(0, x)$  no se anule, es necesario tomar  $n_i = n_i^*$ . Encontramos entonces que:

$$\tau(0, x) = \sum a(I, I^*; x), \quad (5.5)$$

donde ahora la suma se extiende a los conjuntos  $I$ ,  $I^*$  tales que  $I_i$ ,  $I_i^*$  tengan el mismo número de elementos. Los coeficientes  $c(I, I^*)$  en (5.4) son números complejos que pueden caracterizarse en términos de los parámetros que definen  $g \in GL(N, \infty)$  en (5.2)

Consideremos ahora la función  $U(x)$  determinada por:

$$U(x) = \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \tau(0, x). \quad (5.6)$$

En primer lugar vamos a demostrar que para  $N > 1$ ,  $U(x)$  es una función que tiende exponencialmente a 0 en todas las direcciones en el espacio real  $N$ -dimensional correspondiente a las variables  $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(N)})$ . Con este fin tomamos un vector unitario arbitrario  $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$  y definimos los subconjuntos

$$I_i^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \{1, \dots, N_i\}, & u_i > 0 \\ \phi_i, & u_i \leq 0 \end{array} \right., \quad J_i = \left\{ \begin{array}{ll} \{1, \dots, N_i\}, & u_i = 0 \\ \phi_i, & u_i > 0, u_i < 0 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Eligiendo ahora  $\bar{x} = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}) = r\bar{u}$  y tomando el límite asintótico  $r \rightarrow \infty$ , el término dominante en la suma (5.3) corresponderá a los pares  $I, I^*$  de la forma  $I_i = I_i^+ \cup J_i^+$ ,  $I_i^* = I_i^+ \cup J_i^{**}$  siendo  $J_i^+, J_i^{**} \subset J_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). subconjuntos de igual número de elementos. Los sumandos que contribuyen al término dominante son por tanto de la forma  $a(I^+ \cup J', I^+ \cup J''; x)$  donde:

$$\begin{aligned} J' &= (J_1', \dots, J_N'), & I^+ \cup J' &= (I_1^+ \cup J_1', \dots, I_N^+ \cup J_N') \\ J'' &= (J_1'', \dots, J_N''), & I^+ \cup J'' &= (I_1^+ \cup J_1'', \dots, I_N^+ \cup J_N'') \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir  $\tau(0, x)$  como suma de un término dominante en la dirección  $\bar{u}$ , que denotaremos como  $\tau_1(x)$ , y un término subdominante en dicha dirección que denotaremos por  $\tau_2(x)$ . De lo visto anteriormente tenemos que

$$\tau_1(x) = \sum_{J', J''} a(I^+ \cup J', I^+ \cup J''; x). \quad (5.8)$$

Volviendo ahora a (5.5) podemos escribir  $U(x)$  en términos de  $\tau_1(x)$  y  $\tau_2(x)$  como:

$$U(x) = \frac{\partial^N \log \tau_1(x)}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} + \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left( 1 + \frac{\tau_2(x)}{\tau_1(x)} \right). \quad (5.9)$$

El segundo término en (5.9) tiende a 0 exponencialmente cuando  $r \rightarrow \infty$  y debido a que hemos supuesto  $N > 1$  el primer término puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial^N \log \tau_1(x)}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} = \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left[ \sum_{J', J''} \frac{a(I^+ \cup J', I^+ \cup J''; x)}{a(I^+, I^+; x)} \right]. \quad (5.10)$$

Además de (5.4) se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{a(I^+ \cup J', I^+ \cup J''; x)}{a(I^+, I^+; x)} &= \frac{c(I^+ \cup J', I^+ \cup J'')}{c(I^+, I^+)}. \\ \exp \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{n \in J_i'} \xi(q_n^{(i)}, x^{(i)}) - \sum_{m \in J_i''} \xi(-q_m^{(i)*}, x^{(i)}) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

luego cuando  $r \rightarrow \infty$  encontramos:

$$U(x) \simeq \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \partial x_1^{(2)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left\{ \frac{\alpha(I^+ \cup J', I^+ \cup J'')}{\alpha(I^+, I^+)} \right\} \exp \left[ \sum_{i=1}^N \left( \sum_{n \in J'_i} \xi(q_n^{(i)}, x^{(i)}) - \sum_{m \in J''_i} \xi(-q_m^{(i)*}, x^{(i)}) \right) \right]. \quad (5.12)$$

Pero de (5.7) como  $\bar{u} \neq \bar{0}$  se sigue que  $J_i = \emptyset$  para al menos un valor  $i = 1, \dots, N$ . Esto implica que todos los términos en (5.11) son independientes de al menos una de las variables  $x_1^{(i)}$  lo que significa que (5.12) se anula. Concluimos por tanto que  $U(x)$  tiende exponencialmente a 0 en todas las direcciones.

Una vez demostrado el carácter localizado de  $U(x)$  estudiemos la dinámica de estas funciones obtenidas a partir de soluciones de la jerarquía de KP en  $N$  componentes. Tenemos que introducir una variable temporal, para ello tomamos un entero  $r > 1$  e introducimos la variable temporal  $t$  como:

$$x_n^{(i)} = \varepsilon_{nr} \alpha_i t, \quad n > 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.13)$$

donde  $\alpha_i$  son parámetros imaginarios puros si  $r$  es par y reales si  $r$  es impar. Queremos ahora estudiar las propiedades asintóticas de  $U(x)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . De (5.4) vemos que existe un conjunto de velocidades características  $N$ -dimensionales dadas por:

$$\vec{v}_{n_1 n_2 \dots n_N} = (v_{n_1}^{(1)}, \dots, v_{n_N}^{(N)}), \quad v_{n_i}^{(i)} = -\frac{\operatorname{Re}[\alpha_i(q_{n_i}^{(i)})^r]}{\operatorname{Re} q_{n_i}^{(i)}}, \quad n_i = 1, \dots, N_i. \quad (5.14)$$

Suponemos a partir de ahora que los números complejos  $q_n^{(i)}$  están ordenados de modo que:

$$v_1^{(i)} > v_2^{(i)} > \dots > v_{N_i}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.15)$$

Teniendo en cuenta (5.13) la función  $\tau(0, x)$ , y por tanto  $U(x)$  dependen solo de las variables  $\vec{x} = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(N)})$  y de  $t$ . Analicemos el comportamiento asintótico de  $U(x)$  sobre el rayo  $x_{n_1 \dots n_N}(t) = (x_{n_1}^{(1)}(t), \dots, x_{n_N}^{(N)}(t))$  definido como:

$$x_{n_i}^{(i)}(t) = x_1^{(i)} + v_{n_i}^{(i)} t, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.16)$$

De (5.4) sabemos que cuando  $t \rightarrow +\infty$  los términos dominantes de (5.3) vienen dados por

$$\tau(0, x(t)) \simeq a(I^+, I^+; x(t)) + \sum_{r=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_r} a(I^{+i_1, \dots, i_r}, I^{+i_1, \dots, i_r}; x(t)). \quad (5.17)$$

Siendo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N$  y

$$I_i^+ = \{1 \leq n \leq N_i : n > n_i\},$$

$$I_i^{+i_1, \dots, i_r} = \begin{cases} I_i^+ \cup \{n_i\}, & i \in \{i_1, \dots, i_r\} \\ I_i^+, & i \notin \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.18)$$

Entonces cuando  $t \rightarrow +\infty$ :

$$U(x(t)) \simeq \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left[ 1 + \sum_{r=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{a(I^{+i_1, \dots, i_r}, I^{+i_1, \dots, i_r}; x(t))}{a(I^+, I^+; x(t))} \right], \quad (5.19)$$

pero de (5.4) (5.14) (5.16) y (5.18) sabemos que el segundo miembro en (5.19) no depende del tiempo. Ello significa que cuando  $t \rightarrow +\infty$  en la función  $U$  encontramos  $N_1 N_2 \dots N_N$  estructuras localizadas coherentes que se mueven con velocidades (5.14) en el espacio  $N$ -dimensional determinado por las variables  $\vec{x} = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(N)})$ . Vamos ahora a demostrar que no hay otras estructuras asintóticas. Consideremos una velocidad  $N$ -dimensional  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N) : \vec{v} \neq \vec{v}_{n_1, \dots, n_N} 1 \leq n_i \leq N_i, 1 \leq i \leq N$  y consideremos el rayo  $\vec{x}(t) = (x^{(1)}(t), \dots, x^{(N)}(t))$  definido como:

$$x^{(i)}(t) = x^{(i)} + v_i t; \quad (5.20)$$

para encontrar los términos dominantes de (5.5) sobre el rayo (5.20) empezamos por definir el conjunto de índices  $K = \{i : v_i = v_{n_i}^{(i)} \text{ para algún } n' \in \{1, \dots, N_i\}\}$  y el orden de  $K$  lo denotaremos como  $M$ . Podemos ahora escribir los términos dominantes como:

$$\tau(0, x(t)) \simeq a(I^+, I^+; x(t)) + \sum_{r=1}^M \sum_{i_1, \dots, i_r \in K} a(I'^{i_1, \dots, i_r}, I'^{i_1, \dots, i_r}; x(t)). \quad (5.21)$$

donde

$$I_i'^+ = \{1 \leq n \leq N_i : v_n^{(i)} < v_i\},$$

$$I_i'^{i_1, \dots, i_r} = \begin{cases} I_i'^+ \cup \{n_i'\}, & i \in \{i_1, \dots, i_r\} \\ I_i'^+, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad i \in K \quad (5.22)$$

luego

$$U(x(t)) \simeq \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left[ 1 + \sum_{r=1}^M \sum_{i_1, \dots, i_r \in K} \frac{a(I'^{i_1, \dots, i_r}, I'^{i_1, \dots, i_r}; x(t))}{a(I^+, I^+; x(t))} \right]. \quad (5.23)$$

Pero de la hipótesis  $\bar{v} \neq \bar{v}_{n_1 \dots n_N}$  deducimos que  $M < N$ , luego de (5.4) el argumento del logaritmo en (5.23) es independiente de al menos una de las variables  $x_1^{(i)}$ . Es decir que cuando  $t \rightarrow \infty$  sobre el rayo (5.20)  $U \rightarrow 0$ . Vemos de este modo que cuando  $t \rightarrow \infty$  la función  $U$  consta de  $N_1 N_2 \dots N_N$  estructuras localizadas que se mueven con velocidades (5.14) en el espacio  $N$ -dimensional determinado por las variables  $\bar{x} = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(N)})$ . Análogamente podemos llegar a igual resultado para el límite asintótico  $t \rightarrow -\infty$ , donde en este caso el comportamiento de  $U$  sobre los rayos (5.16) viene dado por:

$$U(x(t)) \simeq \frac{\partial^N}{\partial x_1^{(1)} \dots \partial x_1^{(N)}} \log \left[ 1 + \sum_{r=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_r} \frac{a(I^{-i_1, \dots, i_r}, I^{-i_1, \dots, i_r}; x(t))}{a(I^-, I^-; x(t))} \right],$$

siendo  $1 \leq i_1 \leq i_2 \dots \leq i_r \leq N$  y

$$I_i^- = \{1 \leq n \leq N_i : n < n_i\}, \\ -I_i^{-i_1, \dots, i_r} = \begin{cases} I_i^- \cup \{n_i\}, & i \in \{i_1, \dots, i_r\} \\ I_i^-, & i \notin \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Concluimos por tanto que la función  $U$  obtenida a partir de (5.2) está asintóticamente formada por  $N_1 N_2 \dots N_N$  estructuras localizadas que se desplazan a las velocidades  $N$ -dimensionales dadas por (5.14) y que en general cambian de forma después de sufrir la interacción.

## 5.2 Sistema integrable (3+1)-dimensional

Acabamos de encontrar una estructura coherente localizada  $N$ -dimensional, sabemos además que para  $N = 2$  la ecuación de DS admite soluciones de la forma (5.4) y (5.5) con los comportamientos asintóticos mostrados en la sección anterior. Vamos ahora a buscar un sistema integrable que admita este tipo de soluciones para  $N = 3$ . Con este fin partimos de la ecuación de Hirota (2.25), tomamos  $N = 3$ ,  $l = (1, 0, 0)$ ,  $s = (1, 1, 0)$ ,  $\tau = \tau'$  y definimos las funciones  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  como:

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \tau(0, 0, 0; x) \\ \tau_2(x) &= \tau(1, -1, 0; x) \\ \tau_3(x) &= \tau(1, 0, -1; x) \\ \tau_4(x) &= \tau(0, -1, 1; x). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Realizando para  $\gamma$  las elecciones:

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 1, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (0, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 1, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (0, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (1, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (0, 1, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (1, 0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (1, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

encontramos las ecuaciones de Hirota:

$$\begin{aligned} (D_2^{(2)} + D_1^{(2)^2})\tau_2\tau_1 &= 0, \\ (-D_2^{(1)} + D_1^{(1)^2})\tau_2\tau_1 &= 0, \\ D_1^{(3)}\tau_2\tau_1 + \tau_4\tau_3 &= 0, \\ D_2^{(3)}\tau_2\tau_1 + D_1^{(3)}\tau_4\tau_3 &= 0 \\ D_1^{(2)}D_1^{(3)}\tau_2\tau_1 + D_1^{(2)}\tau_4\tau_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Tomando ahora  $s = (2, 0, 0)$  además de las funciones  $\tau$  definidas en (5.24) nos aparecen las funciones  $\tau(-1, 1, 0; x)$  y  $\tau(-1, 0, 1; x)$ . Pero como vimos en la sección 4.2 tomando elementos  $g \in Gl(N\infty)$  de la forma (4.27), (4.28), (4.29) se satisface que

$$\tau(l, x) = (-1)^{\theta(l)} \tau^*(-l, x)$$

donde

$$\theta(l) = \sum_{j=1}^N \left\{ j l_j + \frac{1}{2} l_j (l_j + 1) \right\}$$

luego restringiendonos a estos elementos tenemos que:

$$\begin{aligned} \tau(-1, 1, 0; x) &= \tau_2^* \\ \tau(-1, 0, 1; x) &= -\tau_3^*. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Eligiendo ahora para  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (1, 0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (0, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (1, 0, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (1, 0, 0, \dots); & \gamma^{(3)} &= (1, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)}D_1^{(2)}\tau_1\tau_1 - 2|\tau_2|^2 &= 0 \\ D_1^{(1)}D_1^{(3)}\tau_1\tau_1 + 2|\tau_3|^2 &= 0 \\ D_1^{(3)}\tau_2^*\tau_2 &= D_1^{(2)}\tau_3^*\tau_3. \end{aligned} \tag{5.27}$$



Finalmente tomando  $s = (1, 0, 1)$  y eligiendo para  $\gamma$ :

$$\gamma^{(1)} = (1, 0, 0, \dots); \quad \gamma^{(2)} = (1, 0, 0, \dots); \quad \gamma^{(3)} = (0, 0, \dots)$$

encontramos:

$$D_1^{(1)} D_1^{(2)} \tau_1 \tau_3 + D_1^{(1)} \tau_4^* \tau_2 = 0 \quad (5.28)$$

Para transformar estas ecuaciones de Hirota en ecuaciones diferenciales en  $(3+1)$  dimensiones realizamos ahora el cambio de variables:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{x}{2} & x_2^{(1)} &= -\frac{i}{4}t + \frac{i}{4}t' \\ x_1^{(2)} &= \frac{y}{2} & x_2^{(2)} &= \frac{i}{4}t + \frac{i}{4}t' + \frac{i}{4}t'' \\ x_1^{(3)} &= \frac{z}{2} & x_2^{(3)} &= -\frac{i}{4}t + \frac{i}{4}t'' \end{aligned} \quad (5.29)$$

con lo que las ecuaciones (5.25), (5.27) y (5.28) se transforman en:

$$\begin{aligned} (iD_t + D_x^2 + D_y^2) \tau_1 \tau_2 + \frac{1}{2} D_z \tau_3 \tau_4 &= 0 \\ 2D_z \tau_1 \tau_2 &= \tau_3 \tau_4 \\ 2D_y D_z \tau_1 \tau_2 &= D_y \tau_3 \tau_4 \\ 2D_x D_y \tau_1 \tau_1 &= |\tau_2|^2 \\ 2D_x D_z \tau_1 \tau_1 &= -|\tau_3|^2 \\ D_z \tau_2^* \tau_2 &= D_y \tau_3^* \tau_3 \\ 2D_x D_y \tau_1 \tau_3 + D_x \tau_4^* \tau_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Como estas ecuaciones no contienen ninguna derivación con respecto a las variables  $t'$  y  $t''$  podemos tomar  $t' = t'' = 0$ . Entonces de (5.29) se deduce que las variables  $x_n^{(i)}$   $n \geq 2$  son de la forma (5.13) con  $r = 2$ ,  $\alpha_1 = -\frac{i}{4}$ ,  $\alpha_2 = \frac{i}{4}$ , y  $\alpha_3 = -\frac{i}{4}$ . Definiendo ahora las funciones

$$U = \log \tau_1, \quad q = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad p = \frac{\tau_3}{\tau_1}, \quad \varphi = \frac{\tau_4}{\tau_1}, \quad (5.31)$$

el sistema de ecuaciones (5.30) se convierte en:

$$-iq_t + q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} + 2(U_{xx} + U_{yy})q - \frac{2p_x q_x}{p} = 0, \quad (5.32a)$$

$$4U_{xy} = |q|^2, \quad 4U_{xz} = -|p|^2, \quad (5.32b)$$

$$pqU_{yz} = -p_y q_x, \quad pqU_{xy} = -qp_x y + q_x p_y. \quad (5.32c)$$

Este es un sistema de ecuaciones sobredeterminado ya que contiene cinco ecuaciones para las tres variables dependientes  $q$ ,  $p$  y  $U$ . Obviamente es

una generalización (3+1)-dimensional de la ecuación de DS, a la cual se reduce cuando no hay dependencia en la variable  $z$ .

Podemos generar soluciones al sistema (5.32) a partir de elementos  $g$  de la forma (5.2) que satisfagan:

$$a_{nm}^{ij} g_m^{(j)*} = (-1)^{i+j} (a_{mn}^{ji} g_n^{(i)*})^*.$$

Las propiedades de dichas soluciones son las descritas en la sección 5.1. La más sencilla de estas soluciones se obtiene haciendo  $N_1 = N_2 = N_3 = 1$ , y está formada por una sola estructura que se desplaza a la velocidad  $(-q_{1I}^{(1)}, q_{1I}^{(2)}, -q_{1I}^{(3)})$ . Denotando:

$$A^{ij} = a_{11}^{ij} \psi^{(i)}(q_1^{(i)}) \psi^{(j)*}(-q_1^{(j)*})$$

tenemos que la función  $\tau_1(x, y, z, t)$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \tau_1(x, y, z) = \{ & 1 + A^{11} + A^{22} + A^{33} + A^{11}A^{22} + A^{12}A^{21} + \\ & A^{11}A^{33} + A^{13}A^{31} + A^{22}A^{33} + A^{23}A^{32} + \\ & A^{11}A^{22}A^{33} + A^{11}A^{23}A^{32} + A^{13}A^{31}A^{22} + \\ & A^{12}A^{21}A^{33} + A^{12}A^{23}A^{31} + A^{21}A^{32}A^{13} \} \tau_0(t, x)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Introduciendo ahora los parámetros reales definidos como:

$$\begin{aligned} c^i &= -\frac{a_{11}^{ii} q_1^{(i)*}}{2q_{1R}^{(i)}}; & c^{ij} &= -\frac{a_{11}^{ij} a_{11}^{ji} q_1^{(i)*} q_1^{(j)*}}{4q_{1R}^{(i)} q_{1R}^{(j)}}, \quad i < j \\ c^{123} &= \text{Re} \left\{ \frac{a_{11}^{12} a_{11}^{23} a_{11}^{31} q_1^{(1)*} q_1^{(2)*} q_1^{(3)*}}{4q_{1R}^{(1)} q_{1R}^{(2)} q_{1R}^{(3)}} \right\}, \end{aligned}$$

obtenemos finalmente que la función  $\tau_1$  sobre el rayo  $(x - q_{1I}^{(1)}, y + q_{1I}^{(2)}, z - q_{1I}^{(3)})$  está expresada como:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 + c^1 e^{q_{1R}^{(1)} x} + c^2 e^{q_{1R}^{(2)} y} + c^3 e^{q_{1R}^{(3)} z} + (c^1 c^2 + c^{12}) e^{q_{1R}^{(1)} x + q_{1R}^{(2)} y} \\ &+ (c^1 c^3 + c^{13}) e^{q_{1R}^{(1)} x + q_{1R}^{(3)} z} + (c^2 c^3 + c^{23}) e^{q_{1R}^{(2)} y + q_{1R}^{(3)} z} + \\ &+ (c^1 c^2 c^3 + c^1 c^{23} + c^2 c^{13} + c^3 c^{12} + c^{123}) e^{q_{1R}^{(1)} x + q_{1R}^{(2)} y + q_{1R}^{(3)} z}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Sabemos que  $U_{xyz}$  es una función exponencialmente localizada, por otra parte de (5.32b) se desprende que  $U_{xy}$  es también un objeto relevante. Representamos entonces en las figuras 5.1 y 5.2 las superficies de nivel de ambas funciones correspondientes a  $\tau_1$  dada en (5.34) y a la elección de parámetros:

$$\begin{aligned} q_{1R}^{(1)} &= q_{1R}^{(2)} = q_{1R}^{(3)} = 1, & c^1 &= c^2 = c^3 = 1 \\ c^{12} &= c^{23} = 1, & c^{13} &= -0.99, & c^{123} &= 0. \end{aligned}$$

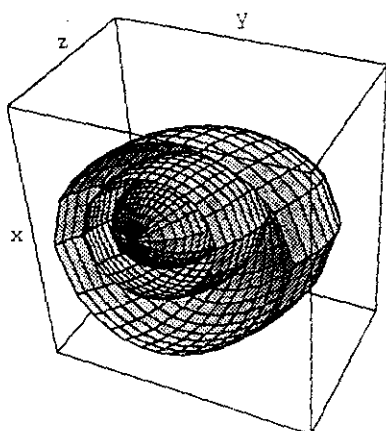


Figura 5.1

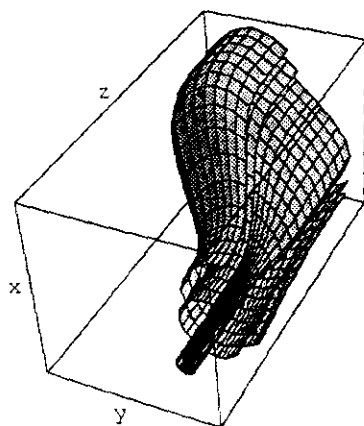


Figura 5.2

## Capítulo 6

# Otras perspectivas: jerarquías BKP

Hasta ahora hemos estudiado únicamente sistemas integrables obtenidos a partir de la jerarquías de KP. El objeto de este capítulo es mostrar como existen otras posibilidades para construir sistemas integrables. Con este fin consideraremos las llamadas jerarquías de BKP [15] y las analizaremos desde el punto de vista del formalismo bilineal.

Las jerarquías BKP están asociadas a un álgebra de Clifford [14] generada por campos fermiónicos neutros:  $\phi^{(i)}(k)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) definidos sobre la circunferencia  $\gamma$  del plano complejo y que satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\phi^{(i)}(k), \phi^{(j)}(q)\} = \delta^{ij} \delta_{\gamma}(k+q) \quad (6.1)$$

donde  $\delta_{\gamma}(k+q)$  denota la distribución:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} \delta_{\gamma}(k+q) f(k) = f(-q).$$

De las relaciones de anticonmutación encontramos que los productos cuadráticos  $\phi^{(i)}(p)\phi^{(j)}(q)$  generan un álgebra de Lie que denotaremos por  $gO(N\infty)$  y cuyos elementos son de la forma:

$$\oint_{\gamma} \frac{dp}{2\pi i p} \oint_{\gamma} \frac{dq}{2\pi i q} \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(p,q) \phi^{(i)}(p) \phi^{(j)}(q),$$

donde  $a^{ij}(p,q)$  son distribuciones en  $\gamma \times \gamma$ . La exponenciación de este álgebra nos genera un grupo de Lie que denotaremos  $GO(N\infty)$ . También

de las relaciones de conmutación se sigue fácilmente que:

$$\begin{aligned} [\phi^{(i)}(p)\phi^{(j)}(q), \phi^{(l)}(k)] &= \sum_{\mu=1}^N \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} X^{\mu l'}(k, k') \phi^{(\mu)}(k'), \\ [\phi^{(i)}(p)\phi^{(j)}(q), \phi^{(l)}(-k)] &= \sum_{\mu=1}^N \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} \tilde{X}^{\mu l'}(k, k') \phi^{(\mu)}(-k') \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde

$$\begin{aligned} X^{\mu l'}(k, k') &= \delta^{jl} \delta^{i i'} \delta_{\gamma}(k+q) \delta_{\gamma}(k'-p) - \delta^{il} \delta^{j i'} \delta_{\gamma}(k+p) \delta_{\gamma}(k'-q) \\ \tilde{X}^{\mu l'}(k, k') &= \delta^{jl} \delta^{i i'} \delta_{\gamma}(k-q) \delta_{\gamma}(k'+p) - \delta^{il} \delta^{j i'} \delta_{\gamma}(k-p) \delta_{\gamma}(k'+q). \end{aligned} \quad (6.3)$$

De (6.3) es inmediato que  $\tilde{X}^{\mu l'}(k, k') = -X^{\mu l'}(k', k)$ , luego teniendo en cuenta (6.2) y haciendo igual uso del concepto de representación adjunta del capítulo 2 tenemos que:

$$\begin{aligned} g \phi^{(i)}(k) g^{-1} &= \sum_{j=1}^N \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} G^{ij}(k, k') \phi^{(j)}(k'), \\ g^{-1} \phi^{(i)}(-k) g &= \sum_{j=1}^N \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} G^{ji}(k', k) \phi^{(j)}(-k'). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Definimos ahora el operador  $B$  como:

$$B = \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(k) \otimes \phi^{(i)}(-k). \quad (6.5)$$

Este operador tiene la propiedad de conmutar con los operadores  $g \otimes g$  siendo  $g$  un elemento arbitrario de  $GO(N\infty)$ . Para demostrar este hecho basta con tener en cuenta las relaciones (6.4). Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} Bg \otimes g &= \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(k) g \otimes \phi^{(i)}(-k) g = \\ &= \oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} \sum_{i,j=1}^N \phi^{(i)}(k) g \otimes G^{ji}(k', k) g \phi^{(j)}(-k') \otimes g \\ &= \oint_{\gamma} \frac{dk'}{2\pi i k'} \sum_{j=1}^N g \phi^{(j)}(k') \otimes g \phi^{(j)}(-k') = g \otimes g B. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Una vez consideradas las propiedades del grupo de Lie  $GO(N\infty)$ , para obtener sistemas integrables seguiremos el mismo procedimiento que el utilizado al estudiar la jerarquía de KP. Debemos entonces precisar una re-

presentación de los campos fermiónicos neutros que actúe sobre un cierto espacio de funciones  $\mathcal{F}$  así como considerar una identidad bilineal que nos dará los sistemas integrables. Vamos a considerar en las siguientes secciones como obtener estas representaciones y la identidad bilineal para los casos  $N = 1$  y  $N = 2$ .

## 6.1 Jerarquía BKP en una componente

Sea  $\mathcal{F}$  el espacio de funciones que depende de una colección infinita de variables complejas que denotaremos como  $\mathbf{z} = (z_1, z_3, \dots, z_{2n+1}, \dots)$  y que son analíticas para  $\mathbf{z}$  cercano al origen. Definimos los operadores  $\phi(k)$  actuando sobre  $\mathcal{F}$  como:

$$\phi(k)\tau(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tilde{\xi}(\mathbf{k}, \mathbf{z})} e^{-2\epsilon(\frac{1}{k})\tilde{\nabla}} \tau(\mathbf{z}) \quad (6.7)$$

donde

$$\tilde{\xi}(\mathbf{k}, \mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n+1} k^{2n+1} \quad (6.8a)$$

y

$$\left( \epsilon \left( \frac{1}{k} \right) \right)_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{k^{2n+1}}. \quad (6.8b)$$

De (6.7) es claro que si consideramos productos cuadráticos  $\phi(k)\phi(q)$  nos aparecen factores de la forma  $e^{-2\tilde{\xi}(\mathbf{q}, \epsilon(\frac{1}{k}))}$  que teniendo en cuenta (6.8) pueden evaluarse y obtenemos

$$e^{-2\tilde{\xi}(\mathbf{q}, \epsilon(\frac{1}{k}))} = \exp \left[ -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{q}{k} \right)^{2n+1} \right] =$$

$$\exp \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left( -\frac{q}{k} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{q}{k} \right)^n \right] = \frac{k-q}{k+q}, \quad |k| \geq |q|, \quad k \neq q.$$

Por otra parte definiendo los anticonmutadores de operadores de la forma (6.7) por:

$$\{\phi(k), \phi(q)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\phi(ke^{\epsilon})\phi(q) + \phi(qe^{\epsilon})\phi(k))$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{ke^{\epsilon} + q} - \frac{1}{k + qe^{\epsilon}} \right) = \frac{1}{k} \delta_{\mathbf{q}}(k + q)$$

encontramos que la relación de anticonmutación es la dada en (6.1) para  $i = j = 1$  luego los operadores (6.7) son representaciones de los campos fermiónicos neutros en una componente.

Supongamos ahora que queremos encontrar las funciones  $\tau(x)$ ,  $\tau'(x)$  que verifican

$$B\tau(x) \otimes \tau'(x') = \frac{1}{2}\tau(x) \otimes \tau'(x') \quad (6.9)$$

siendo  $B$  el operador definido por (6.5). Esta relación nos define la identidad bilineal y podemos expresarla en función de las representaciones (6.7) como:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} e^{\hat{\epsilon}(k, x-x')} \tau(x - 2\epsilon\left(\frac{1}{k}\right)) \tau'(x' + 2\epsilon\left(\frac{1}{k}\right)) = \tau(x) \tau'(x') \quad (6.10)$$

Para obtener ecuaciones diferenciales de (6.10) hacemos igual que en el caso de las jerarquías de KP el cambio de variables  $x \rightarrow x - y$ ,  $x' \rightarrow x + y$ . Teniendo entonces en cuenta las propiedades de los operadores bilineales de Hirota tenemos que:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{2\pi i k} e^{\hat{\epsilon}(k, -2y)} \cdot e^{(y+2\epsilon(\frac{1}{k}))D} \tau'(x) \cdot \tau(x) = e^{yD} \tau'(x) \cdot \tau(x)$$

evaluando ahora la integral como su residuo en el infinito, tomando  $\tau' = \tau$  y definiendo los polinomios  $\tilde{S}_n(x)$  a partir de los polinomios de Schur  $S_n(x)$  como:

$$\tilde{S}_n(x) = S_n(x)|_{x_{2m}=0}, \quad m = 1, 2, \dots$$

encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n(-2y) \tilde{S}_n(2\tilde{D}) e^{yD} \tau(x) \cdot \tau(x) = e^{yD} \tau(x) \cdot \tau(x). \quad (6.11)$$

Pero de (2.22) tenemos que

$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{[\alpha]=n} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \quad (6.12)$$

donde ahora  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2m+1}, \dots)$  y  $[\alpha] = \alpha_1 + 3\alpha_3 + \dots + (2m+1)\alpha_{2m+1} + \dots$ . Introduciendo (6.12) en (6.11) llegamos a:

$$\left[ \frac{1}{\gamma!} D^\gamma - \tilde{P}_{\gamma,0}(D) \right] \tau(x) \cdot \tau(x) = 0 \quad (6.13)$$

estando  $\tilde{P}_{\gamma,r}(D)$  definido como:

$$\tilde{P}_{\gamma,r}(D) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{(-2)^{|\beta|}}{\alpha! \beta!} D^\alpha \tilde{S}_{[\beta]+r}(2\tilde{D}).$$

Las primeras ecuaciones no triviales que podemos obtener de (6.13) vienen dadas al realizar para  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_3, \dots)$  las elecciones  $\gamma = (0, 2, 0, 0, \dots)$  y  $\gamma = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ ; las ecuaciones en función de los operadores bilineales de Hirota son

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau(x) \cdot \tau(x) = 0,$$

$$(D_1^6 + 7D_1^3 D_3 - 35D_1^2 D_3^2 - 42D_3 D_5 - 21D_5 D_1^3 + 90D_1 D_7) \tau(x) \cdot \tau(x) = 0.$$

Para obtener soluciones a las ecuaciones que constituyen la jerarquía BKP en una componente (6.13) necesitamos conocer una solución para (6.10), pero es inmediato comprobar que  $\tau(x) = \tau'(x) = \tau_0(x)$  siendo  $\tau_0(x) = 1$  es solución. Teniendo ahora en cuenta que el operador  $B$  conmuta con  $g \otimes g$  para todo  $g \in GO(\infty)$  vemos que dada una solución  $\tau$  de (6.9),  $g\tau$  es también solución, luego obtendremos soluciones de las ecuaciones (6.13) haciendo actuar los elementos  $g \in GO(\infty)$  sobre la solución trivial  $\tau_0(x) = 1$ .

## 6.2 Jerarquía BKP en dos componentes

Queremos ahora encontrar una realización de los campos fermiónicos neutros en  $N$  componentes que satisfaga las relaciones de anticonmutación (6.1) donde ahora  $i = 1, 2, \dots, N$ . Construimos para ello los operadores  $B^{(i)}(k)$  como los operadores  $\phi(k)$  de la sección anterior en las colecciones de variables infinitas  $x^{(i)}$   $i = 1, \dots, N$ , es decir:

$$B^{(i)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tilde{\zeta}(k, x^{(i)})} e^{-2\epsilon(\frac{1}{2}) \tilde{\Phi}^{(i)}}.$$

Es inmediato ver que estos operadores satisfacen las relaciones algebraicas:

$$[B^{(i)}(k), B^{(j)}(q)] = 0, \quad \text{si } i \neq j$$

$$\{B^{(i)}(k), B^{(i)}(q)\} = \delta_{\tau}(k+q).$$

Nuestro objetivo es definir operadores  $\phi^{(i)}(k) = a^{(i)}(k) B^{(i)}(k)$  que satisfagan (6.1). Puede verse que una solución vendrá dada por los operadores  $a^{(i)}(k)$  que verifiquen

$$\begin{aligned} a^{(i)}(k) B^{(j)}(q) &= B^{(j)}(q) a^{(i)}(k) \\ a^{(i)}(k) a^{(i)}(q) &= 1 \\ \{a^{(i)}(k), a^{(j)}(q)\} &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{6.14}$$



Para comprobarlo consideramos en primer lugar el anticonmutador con  $i = j$  tenemos entonces:

$$\{\phi^{(i)}(k), \phi^{(i)}(q)\} = \{B^{(i)}(k), B^{(i)}(q)\} = \delta_\gamma(k+q)$$

y en el caso  $i \neq j$

$$\{\phi^{(i)}(k), \phi^{(j)}(q)\} = \{a^{(i)}(k), a^{(j)}(q)\} B^{(i)}(k) B^{(j)}(q) = 0.$$

En el caso  $N = 2$  una solución para (6.14) [44] es proporcionada por  $a^{(i)}(k) = \sigma_i$   $i = 1, 2$  siendo  $\sigma_i$  las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego una representación de los operadores fermiónicos neutros para  $N = 2$  la constituyen los operadores

$$\phi^{(i)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tilde{\epsilon}(k, x^{(i)})} e^{-2\epsilon(\frac{1}{k})} \tilde{\Psi}^{(i)} \sigma_i. \quad (6.15)$$

El espacio  $\mathcal{F}$  sobre el que actúan estos operadores es el espacio de funciones de dos componentes

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}$$

que dependen de dos colecciones infinitas de variables complejas  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ;  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_3^{(i)}, \dots, x_{2n+1}^{(i)}) \in \mathbb{C}^\infty$   $i = 1, 2$  y que son analíticas cerca del origen. Queremos en este caso encontrar las funciones  $\tau(x)$ ,  $\tau'(x)$  que satisfagan:

$$B\tau(x) \otimes \tau'(x') = 0.$$

En función de los operadores (6.15) la identidad bilineal puede escribirse como:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \{ e^{\tilde{\epsilon}(k, x^{(1)} - x^{(1)'})} \sigma_1 \tau(x^{(1)} - 2\epsilon(\frac{1}{k}), x^{(2)}) \otimes \sigma_1 \tau'(x^{(1)'} + 2\epsilon(\frac{1}{k}), x^{(2)'}) + e^{\tilde{\epsilon}(k, x^{(2)} - x^{(2)'})} \sigma_2 \tau(x^{(1)}, x^{(2)} - 2\epsilon(\frac{1}{k})) \otimes \sigma_2 \tau'(x^{(1)'}, x^{(2)'} + 2\epsilon(\frac{1}{k})) \} = 0. \quad (6.16)$$

Realizando en (6.16) los productos tensoriales pueden obtenerse cuatro ecuaciones para las funciones  $\alpha(x)$ ,  $\alpha'(x)$ ,  $\beta(x)$  y  $\beta'(x)$ . Consideraremos a partir de ahora solamente la dada por:

$$\oint_{\gamma} \frac{dk}{k} \{ e^{\tilde{\epsilon}(k, x^{(1)} - x^{(1)'})} \alpha(x^{(1)} - 2\epsilon(\frac{1}{k}), x^{(2)}) \alpha'(x^{(1)'} + 2\epsilon(\frac{1}{k}), x^{(2)'}) - e^{\tilde{\epsilon}(k, x^{(2)} - x^{(2)'})} \alpha(x^{(1)}, x^{(2)} - 2\epsilon(\frac{1}{k})) \alpha'(x^{(1)'}, x^{(2)'} + 2\epsilon(\frac{1}{k})) \} = 0. \quad (6.17)$$

Para determinar las ecuaciones diferenciales asociadas a (6.17) procedemos de nuevo haciendo el cambio de variables  $x \rightarrow x - y$ ,  $x' \rightarrow x + y$  y evaluando la integral como su residuo en el origen. Tomamos  $\alpha' = \alpha$  ( $\tau' = \tau$ ) y obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \tilde{S}_n(-2y^{(1)}) \tilde{S}_n(2\bar{D}^{(1)}) - \tilde{S}_n(-2y^{(2)}) \tilde{S}_n(2\bar{D}^{(2)}) \} e^{yD} \alpha(x) \cdot \alpha(x) = 0$$

introduciendo ahora (6.12) llegamos finalmente a:

$$\left[ \tilde{P}_{\gamma,0}^{(1)}(D) - \tilde{P}_{\gamma,0}^{(2)}(D) \right] \alpha(x) \cdot \alpha(x) = 0 \quad (6.18)$$

donde

$$\tilde{P}_{\gamma,r}^{(i)}(D) = \sum_{\alpha + \beta^{(i)} = \gamma} \frac{(-2)^{|\beta^{(i)}|}}{\alpha! \beta^{(i)}!} \frac{D^\alpha \tilde{S}_{[\beta^{(i)}] + r}(2\bar{D}^{(i)})}{\alpha! \beta^{(i)}!}.$$

En este caso las ecuaciones más sencillas no triviales las obtenemos de (6.18) realizando para  $\gamma$  las elecciones:

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= (1, 0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ \gamma^{(1)} &= (0, 1, 0, 0, \dots); & \gamma^{(2)} &= (1, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Encontramos entonces:

$$D_1^{(1)}(D_1^{(2)})^2 - D_3^{(2)} \alpha \cdot \alpha = 0, \quad D_1^{(2)}(D_1^{(1)})^2 - D_3^{(1)} \alpha \cdot \alpha = 0. \quad (6.19)$$

Realizando ahora el cambio de variables:

$$x = x_1^{(1)}, \quad y = x_1^{(2)}, \quad t = \frac{1}{2}(x_3^{(1)} + x_3^{(2)}), \quad t' = \frac{1}{2}(x_3^{(1)} - x_3^{(2)})$$

y definiendo la función  $q$  como

$$q = \partial_x \partial_y \log \alpha$$

el sistema (6.19) se convierte en:

$$\begin{aligned} q_t &= q_{xx} + q_{yy} + 6(q u_1)_x + 6(q u_2)_y, \\ u_{1y} &= q_x, \quad u_{2x} = q_y. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Para encontrar soluciones de (6.20) sabemos que necesitamos partir de una solución de (6.16); pero es evidente comprobar que  $\tau(x) = \tau'(x) = \tau_0(x)$  donde ahora

$$\tau_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

es solución. Podemos a partir de (6.21) generar nuevas soluciones. Con este fin tomamos elementos de  $GO(2\infty)$  de la forma

$$g = \exp \left( \sum_{i,j=1,2} \sum_{l=1}^{N^{(i)}} \sum_{m=1}^{N^{(j)}} a_{lm}^{ij} \phi^{(i)}(k_l^{(i)}) \phi^{(j)}(k_m^{(j)*}) \right), \quad (6.22)$$

donde  $k_l^{(i)} + k_m^{(i)} \neq 0$ ,  $k_l^{(i)} + k_m^{(i)*} \neq 0$ . Como queremos obtener soluciones  $q$  reales imponemos que  $g$  sea real, para ello los coeficientes  $a_{lm}^{ij}$  deben satisfacer

$$a_{ml}^{ji} = (-1)^{i+j+1} a_{lm}^{ij}.$$

Empezamos por considerar el caso más sencillo que corresponde a tomar en (6.22)  $N^{(1)} = N^{(2)} = 1$ , tenemos así

$$g = \exp \{ a^{11} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(1)}(k^{(1)*}) + a^{12} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(2)}(k^{(2)*}) + a^{21} \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(1)}(k^{(1)*}) + a^{22} \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(2)}(k^{(2)*}) \},$$

y desarrollando la exponencial

$$\begin{aligned} g = & 1 + a^{11} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(1)}(k^{(1)*}) + a^{12} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(2)}(k^{(2)*}) + \\ & a^{21} \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(1)}(k^{(1)*}) + a^{22} \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(2)}(k^{(2)*}) + \\ & a^{11} a^{22} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(1)}(k^{(1)*}) \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(2)*} + \\ & a^{12} a^{21} \phi^{(1)}(k^{(1)}) \phi^{(2)}(k^{(2)*}) \phi^{(2)}(k^{(2)}) \phi^{(1)*}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para calcular  $\tau$  aplicamos (6.23) sobre la solución trivial (6.21), y teniendo en cuenta que en (6.20) no aparecen derivadas respecto a  $t'$ ,  $x_{2n+1}^{(i)}$   $i = 1, 2$   $n > 1$  podemos tomar  $t' = 0$ ,  $x_{2n+1}^{(i)} = 0$   $i = 1, 2$   $n > 1$ . Encontramos de este modo

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, t) = & 1 + a_1 f_1(t, x)^2 + a_2 f_2(t, y)^2 + c(f_1(t, x) f_2(t, y))^2 + \\ & f_1(t, x) f_2(t, y) \operatorname{Re} \{ i a^{21} f_3(t, x, y) \}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde

$$f_1(t, x) = \exp[k_R^{(1)}(x - v_1 t)], \quad f_2(t, y) = \exp[k_R^{(2)}(y - v_2 t)]$$

$$f_3(t, x, y) = \exp[i(k_I^{(1)} x - k_I^{(2)} y - \omega t)]$$

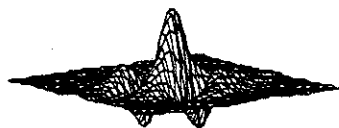
$$a_1 = i a^{11} \frac{k_I^{(1)}}{2k_R^{(1)}}, \quad a_2 = i a^{22} \frac{k_I^{(2)}}{2k_R^{(2)}}, \quad c = -(a^{11} a^{22} - a^{12} a^{21}) \frac{k_I^{(1)} k_I^{(2)}}{4k_R^{(1)} k_R^{(2)}}.$$

con

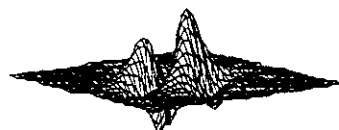
$$v_i = -\frac{(k^{(i)})^2_R}{k_R^{(i)}}, \quad \omega = -\operatorname{Im}(k^{(1)*} - k^{(2)*}).$$

La solución  $q(x, y, t)$  de (6.20) correspondiente a (6.24) describe una estructura exponencialmente localizada en el plano  $(x, y)$  que se desplaza con una velocidad  $v = (v_1, v_2)$  y oscila con una frecuencia  $\omega$ . En la figura 6.1 representamos dicha estructura para la elección de parámetros

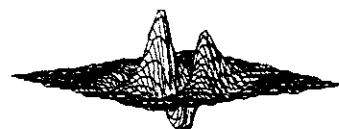
$$k^{(1)} = 1 + i, \quad k^{(2)} = 1 + 2i, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad a^{12} = -i$$



a)  $t = 0$



b)  $t = 0.13$



c)  $t = 0.26$

d)  $t = 0.39$ 

Figura 6.1

Denominaremos "breather" a esta estructura coherente debido a su analogía con el solitón pulsante de la ecuación de sine-Gordon.

Una vez vista la forma de la solución más sencilla volvamos al caso más general de las soluciones generadas por la acción de los elementos de  $GO(2\infty)$  dados en (6.22). Para analizar estas soluciones seguiremos métodos similares a los utilizados en el caso de la ecuación de Davey-Stewartson. Empezamos por denotar

$$A_{lm}^{ij} = a_{lm}^{ij} \phi^{(i)}(k_l^{(i)}) \phi^{(j)}(k_m^{(j)})^*$$

y teniendo en cuenta que de las relaciones de anticonmutación se deduce que:

$$[A_{lm}^{ij}, A_{l'm'}^{i'j'}] = 0, \quad A_{lm}^{ij} A_{l'm'}^{i'j'} = A_{l'm'}^{i'j'} A_{lm}^{ij} = 0$$

podemos escribir  $g$  como:

$$g = \prod_{i,j=1,2} \prod_{l=1}^{N^{(i)}} \prod_{m=1}^{N^{(j)}} (1 + A_{lm}^{ij}). \quad (6.25)$$

Para agrupar todos los términos con igual dependencia en las variables  $x$ ,  $y$ ,  $t$  definimos los subconjuntos de índices  $I_i, I'_i \subset \{1, \dots, N^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ) tales que  $n(I_1 \cup I_2) = n(I'_1 \cup I'_2)$  donde  $n(I)$  denota el número de elementos de  $I$ ; las particiones  $I_{ij} \subset I_i$  que verifican

$$I_i = I_{i1} \cup I_{i2} \quad , \quad I_{i1} \cap I_{i2} = \emptyset, \quad (6.26)$$

y las aplicaciones inyectivas  $\sigma_{ij} : I_{ij} \rightarrow I'_j$ , que cumplen:

$$I'_j = \sigma_{1j}(I_{1j}) \cup \sigma_{2j}(I_{2j}) \quad , \quad \sigma_{1j}(I_{1j}) \cap \sigma_{2j}(I_{2j}) = \emptyset. \quad (6.27)$$

Entonces (6.25) puede escribirse de la forma

$$g = \sum A(I_1, I'_1, I_2, I'_2), \quad (6.28)$$

estando la suma extendida a todos los conjuntos  $I_i, I'_i \subset \{1, \dots, N^{(i)}\}$  y tal que

$$A(I_1, I'_1, I_2, I'_2) = \sum_{i,j=1,2} \prod_{l \in I_i} A_{l\sigma_{ij}(l)}^{ij}. \quad (6.29)$$

donde ahora la suma está extendida a todas las posibles particiones  $I_{ij}$  y a todas las posibles aplicaciones inyectivas  $\sigma_{ij}$ . Nótese que a diferencia de lo visto para la ecuación DS no es necesario aquí que  $n(I_i) = n(I'_i)$  para que al actuar sobre la solución trivial la contribución de (6.29) no se anule.

La dependencia en las variables  $x, y, t$  de cada término de la forma (6.29) viene finalmente dada por:

$$\exp \sum_{i=1,2} \left\{ \sum_{l \in I_i} \theta_l^{(i)} + \sum_{m \in I'_i} \theta_m^{(i)*} \right\}$$

siendo

$$\theta_l^{(1)} = k_l^{(1)} x + k_l^{(1)*} t, \quad \theta_m^{(2)} = k_m^{(2)} y + k_m^{(2)*} t.$$

Para estudiar las propiedades de la solución generada por (6.28) vamos a realizar un análisis asintótico en la variable temporal de la función

$$q(x, y, t) = \partial_x \partial_y \log \alpha(x, y, t)$$

similar al realizado en el caso de la ecuación DS. De lo expuesto anteriormente sabemos que el comportamiento asintótico de cada término (6.29) vendrá determinado por:

$$\left| \exp \sum_{i=1,2} \left\{ \sum_{l \in I_i} \theta_l^{(i)} + \sum_{m \in I'_i} \theta_m^{(i)*} \right\} \right| = \exp \left\{ \sum_{l \in I_1, I'_1} k_{lR}^{(1)} (x - v_l^{(1)} t) + \sum_{m \in I_2, I'_2} k_{mR}^{(2)} (y - v_m^{(2)} t) \right\} \quad (6.30)$$

donde

$$v_{lm} = (v_l^{(1)}, v_m^{(2)}) = \left( -\frac{(k_l^{(1)})_R^3}{(k_l^{(1)})_R}, -\frac{(k_m^{(2)})_R^3}{(k_m^{(2)})_R} \right).$$

Suponiendo que hemos elegido los coeficientes  $k_l^{(i)}$  de modo que  $(k_l^{(i)})_R > 0$ ,  $l = 1, \dots, N^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  y que las velocidades están ordenadas de modo que

$v_1^{(i)} > v_2^{(i)} > \dots > v_{N^{(i)}}^{(i)}$ , el término dominante de la solución sobre los rayos  $x(t) = x + v_1^{(1)}t$ ,  $y(t) = y + v_2^{(2)}t$  en los límites  $t \rightarrow \pm\infty$  vendrá determinado por:

$$A(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm}) + A(I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\}) + \\ A(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\}, I_{l_2}^{\pm}) + A(I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_2}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm}) + \quad (6.31) \\ A(I_{l_1}^{\pm}, I_{l_1}^{\pm}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\}) + A(I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_1}^{\pm} \cup \{l_1\}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\}, I_{l_2}^{\pm} \cup \{l_2\})$$

donde los conjuntos de índices  $I_l^{\pm}$  están definidos como en (4.55). La estructura que determina (6.31) es similar a la dada por (6.24) donde los coeficientes son función de los parámetros complejos  $k_l^{(i)}$   $i = 1, 2$   $l = 1, \dots, N^{(i)}$  y pueden calcularse teniendo en cuenta que:

$$\phi^{(i)}(k_1)\phi^{(i)}(k_2)\dots\phi^{(i)}(k_M)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ 2^{-\frac{M}{2}} \exp\left\{\sum_{j=1}^M \xi(k_j, x)\right\} \prod_{j=1}^M \prod_{l < j} \frac{k_l - k_j}{k_l + k_j} \sigma_i^M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además es inmediato ver que sobre los rayos  $x(t) = x + v_1 t$ ,  $y(t) = y + v_2 t$  donde  $(v_1, v_2) \neq (v_{l_1}^{(1)}, v_{l_2}^{(2)})$   $l_i = 1, \dots, N^{(i)}$  la solución  $q(x, y, t)$  se anula en ambos límites asintóticos. Concluimos entonces que la solución determinada por (6.22) describe un proceso en el que interaccionan  $N^{(1)}, N^{(2)}$  'breathers' sufriendo no solo un desplazamiento sino también un cambio de forma. Asimismo de lo visto hasta ahora podemos decir que la dinámica de los 'breathers' que describe la ecuación (6.20) es similar a la dinámica de dromiones descrita por la ecuación DS, podemos por ejemplo bajo las mismas condiciones que las expuestas en el capítulo 4 encontrar procesos de fusión y fisión de 'breathers'.

# Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, H. Segur :Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia. (1981)
- [2] M. Boiti, J. Léon, L. Martina y F. Pempinelli, Phys. Lett. A 132, (1988) 432.
- [3] M. Boiti, J. Léon, L. Martina y F. Pempinelli, "Solitons in two dimensions" in "Integrable Systems and Applications", eds. M. Balabane et al., Lecture Notes in Physics n. 342 (Springer 1989)
- [4] M. Boiti, J. Léon, L. Martina y F. Pempinelli, "Localized Solitons in the Plane" in "Nonlinear Evolution Equations, Integrability and Spectral Methods", eds. A. Degasperis et al. (Manchester University Press, 1989).
- [5] M. Boiti, J. Léon y F. Pempinelli, Inverse Problems 6 (1990) 715.
- [6] M. Boiti, J. Léon y F. Pempinelli, J. Math. Phys. 31 (1990) 2612.
- [7] M. Boiti, J. Léon y F. Pempinelli, Phys. Lett. A 141 (1989) 96.
- [8] M. Boiti, J. Léon y F. Pempinelli, Phys. Lett. A 141 (1989) 101
- [9] F. Calogero y W. Eckhaus :Inverse Problems 3, (1987) L27.
- [10] F. Calogero y A. Maccari, "Equations of nonlinear Schrödinger type in 1+1 and 2+1 dimensions, obtained from integrable PDEs in "Inverse Problems: An Interdisciplinary Study", ed. P. C. Sabatier (Academic Press 1987).
- [11] E. Date, Lett. Math. Phys. 16 (1988) 125
- [12] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara y T. Miwa, J Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3806.



- [13] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara y T. Miwa, J Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3813.
- [14] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara y T. Miwa, Physica 4D (1982) 343.
- [15] E. Date, M. Kashiwara y T. Miwa, Proc. Japan Acad 57A (1981) 342
- [16] E. Date, M. Kashiwara y T. Miwa: Transformation Groups for Soliton Equations, in Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory, edited by M. Jimbo, T. Miwa, World Scientific, Singapore (1983)
- [17] A. Davey y K. Stewartson, Proc. R. Soc. Lond. A. 338, (1974) 101.
- [18] B. Denardo, W. Wright, S. Putterman y A. Larraza, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1518.
- [19] V. G. Drinfeld y V.V. Sokolov, Dokl. Akad. Nauk. USSR 258 (1981) 11.
- [20] V. G. Drinfeld y V.V. Sokolov, J. Sov. Math. 30 (1985) 1975.
- [21] A. S. Fokas y P. M. Santini, Phys. Rev. Lett. 63, (1989) 1329.
- [22] A. S. Fokas y P. M. Santini, Physica D 44 (1990) 99.
- [23] R. Hernández Heredero, L. Martínez Alonso y E. Medina Reus, Phys. Lett. A152 (1991) 37.
- [24] J. Hietarinta y R. Hirota, Phys Lett. A 145, (1990) 237.
- [25] R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 54 (1985) 2409.
- [26] R. Hirota, Physica D (1986) 161.
- [27] R. Hirota, Prog. of Theor. Phys. 52 (1974) 1498.
- [28] M. Jaulent, M. Manna y L. Martínez Alonso, Inverse problems 5 (1989) 573.
- [29] M. Jaulent, M. Manna y L. Martínez Alonso, Phys. Lett. A. 151 (1990) 303.
- [30] M. Jaulent, M. Manna, L. Martínez Alonso y E. Medina Reus, Phys. Lett. A. 144 (1990) 329.
- [31] M. Jaulent y I. Miodek, Lett. Math. Phys. 1 (1976) 243.
- [32] M. Jimbo y T. Miwa, Publ. RIMS Kyoto Univ. 19, (1983) 943.

- [33] V. G. Kac, D. H. Peterson : *Lectures on the Infinite Wedge Representation and the MKP Hierarchy*, Sem. Math. Sup. Vol. 102, Presse Univ. Montreal, Montreal (1986) .
- [34] D. J. Kaup, *Proc. Theor. Phys.* 54 (1975) 72.
- [35] D. J. Kaup, *Proc. Theor. Phys.* 54 (1975) 396.
- [36] L. Krishnan, *J. Phys. Soc. Jpn.* 40 (1982) 2391.
- [37] Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance in Group Theory and its Applications II*, edited by E.M. Loebl, Academic Press (1991).
- [38] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bortdag, A. R. Its y V. B. Matveev, *Phys. Lett. A* 63 (1977) 205.
- [39] L. Martinez Alonso, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 2342.
- [40] L. Martinez Alonso, *Lett. Math. Phys.* 4 (1980) 215.
- [41] L. Martinez Alonso y E. Medina Reus: "Exotic coherent structures in the Davey-Stewartson equation" (enviado para publicar).
- [42] L. Martinez Alonso y E. Medina Reus: "Localized coherent structures of the Davey-Stewartson equation in the bilinear formalism" (enviado para publicar).
- [43] L. Martinez Alonso, E. Medina Reus y R. Hernández Heredero, *Inverse Problems* 7 (1991) L25.
- [44] L. Martinez Alonso, E. Medina Reus y E. Olmedilla Moreno: "Breathers in 2+1 dimensions" (aceptado para publicar en *Phys. Lett. A*)
- [45] V. B. Matveev y M. I. Yavor, *Ann. Inst. Henri. Poincaré A* XXI (1979) 25.
- [46] R. L. Sachs, *Physica D* 30 (1988) 1.
- [47] P. M. Santini, *Physica D* 41, No1, (1990) 26.
- [48] J. Satsuna, *J. Phys. Soc. Jpn.* 40 (1976) 286.
- [49] J. Satsuna, M. J. Ablowitz : *J. Math. Phys.* 20, (1979) 1496.
- [50] L. A. Segal "Mathematics applied to continuum mechanics". (Dover 1987)

- [51] G. B. Whitham: "Lectures on Wave Propagation" Tata Institute of Fundamental Research Bombay (Berlin. Springer-Verlag 1979).
- [52] G. B. Whitham: "Linear and Nonlinear Waves" (John Wiley, New York, 1974)
- [53] V. E. Zakharov y E. A. Kuznetsov, *Physica* 18 D (1986) 455.